

RAPPORT DE TIPE

Bonnes suites, sous-suites croissantes et tableaux de Young

Igor Kortchemski

Juin 2006

Introduction

Nous nous intéressons ici à des propriétés de répartition d'entiers constituant des suites finies. Nous établissons d'abord des propriétés concernant les bonnes suites, qui se révèlent être un codage astucieux de permutations. Une bonne suite est une suite finie d'entiers naturels qui satisfait à la propriété suivante : si l'entier $k \geq 2$ apparaît dans la suite, alors la première apparition de $k - 1$ survient avant la dernière apparition de k . Nous montrons les deux résultats suivants :

1. En moyenne, le premier terme d'une bonne suite de longueur n est équivalent à $\frac{n}{4}$ lorsque n tend vers l'infini.
2. En moyenne, le nombre de 1 figurant dans une bonne suite de longueur n converge vers $e - 1$ lorsque n tend vers l'infini.

En transportant ce résultat sur les permutations, nous prouvons qu'en moyenne, la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'entiers consécutifs commençant par 1 d'une permutation de longueur n converge vers $e - 1$ lorsque n tend vers l'infini.

Nous estimons alors en toute généralité la longueur $l_n(\pi)$ de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation π de longueur n . En mettant en oeuvre la correspondance de Robinson-Schensted qui établit une bijection entre l'ensemble des permutations de longueur fixée et l'ensemble des couples de tableaux de Young standard de même forme, nous donnons un encadrement de la valeur moyenne $E[l_n]$ de l_n en suivant l'approche de Pilpel. Un argument heuristique, idée profonde sous-jacente à la preuve de Vershik-Kerov, permet alors de « constater » la convergence de $E[l_n]/\sqrt{n}$ vers 2. Ce résultat sera vérifié par une implémentation d'un programme sous CAML. Nous présentons finalement deux théorèmes (Baik, Deift et Johansson, 1999 et Okounkov, 2000) qui généralisent d'une part ce résultat en donnant un développement asymptotique plus poussé de $E[l_n]$, et qui relie d'autre part le comportement de $E[l_n]$ au comportement des valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire.

Première partie

Bonnes suites et premier terme

Les bonnes suites ont été introduites par Federico Ardila lorsqu'il étudiait une statistique sur les permutations [1]. Il a déterminé le nombre de bonnes suites de longueur fixée et a proposé ce problème à l'Olympiade Internationale de Mathématiques en 2002. Plus tard, Richard P. Stanley a utilisé ce résultat en tant qu'exercice à la Clay Research Academy 2005 [2].

Les bonnes suites ont été intensivement étudiées dans [3, 4] par le truchement de deux bijections construites entre l'ensemble des bonnes suites et celui des permutations de même longueur. Nous poursuivons ce travail de recherche en nous intéressant ici à une conjecture communiquée dans [5] : considérons l'ensemble des bonnes suites G_n de longueur fixée n . On sait, d'après [3, 4], que cet ensemble est fini, plus précisément de cardinal $n!$. Fixons-nous un entier i , et définissons σ_i de la manière suivante :

$$\sigma_i = \sum_{u \in G_n} u(i),$$

où $u(i)$ est l'entier en i -ième position dans la bonne suite u . La conjecture en question stipule que lorsque i varie de 1 à n , les σ_i forment une suite arithmétique. Nous démontrons cette conjecture en prouvant que la raison de cette suite arithmétique est $(n-1)!$ et que $\sigma_1 = \frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$.

Par souci de concision, la preuve étant assez technique, seules ses grandes lignes seront développées ici. La preuve complète se trouve en annexe à titre indicatif.

1 Préliminaires

En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et propriétés qui ont été établies dans [3] et qui nous seront nécessaires par la suite. Nous noterons $[n]$ l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et \mathfrak{S}_n l'ensemble de toutes les permutations de $[n]$.

1.1 Bonnes suites

Définition 1.1.1. Soit n un entier strictement positif. Une suite de n entiers strictement positifs (non nécessairement distincts) est appelée *bonne suite* si elle satisfait à la condition suivante : pour tout entier $k \geq 2$, si le nombre k apparaît dans la suite, alors il en est de même de $k-1$ et, de plus, la première apparition de $k-1$ survient avant la dernière apparition de k .

Par exemple, 2123 est une bonne suite de longueur 4 mais 31312 n'est pas une bonne suite : 2 ne survient pas avant la dernière apparition de 3.

1.2 Bijection entre G_n et \mathfrak{S}_n

Nous rappelons ici une bijection entre G_n et \mathfrak{S}_n , que l'on notera ici \mathcal{B} par raison de simplicité.

Définition 1.2.1. Soit $u \in G_n$. On définit un ordre total sur $[n]$ dépendant de u , \succ , vérifiant :

$$i \succ j \iff (u_i > u_j \text{ ou } (u_i = u_j \text{ et } i > j)).$$

Définition 1.2.2. Soit $u \in G_n$ et \succ sa relation d'ordre associée. Soit σ la permutation de \mathfrak{S}_n telle que $\sigma(1) \prec \sigma(2) \prec \dots \prec \sigma(n)$. On définit $\mathcal{B}(u) \in \mathfrak{S}_n$ en posant $\mathcal{B}(u) = \sigma^{-1}$, permutation inverse de σ .

On pourra par exemple vérifier que $\mathcal{B}(31223) = 51324$ et que $\mathcal{B}(3411523) = 5621734$.

2 Sommes de termes de même place

Rappelons la conjecture mentionnée en introduction.

Définition 2.0.3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [n]$. On pose $\sigma_i = \sum_{u \in G_n} u(i)$, où $u(i)$ est l'entier en i -ième position dans la bonne suite u .

Conjecture 2.0.4. Lorsque i varie de 1 à n , les σ_i forment une suite arithmétique.

À titre d'exemple, on pourra vérifier que $G_4 = \{ 1111, 1112, 1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1213, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234, 1323, 2112, 2121, 2122, 2123, 2132, 2212, 2312, 3123 \}$

de sorte que $\sigma_1 = 33$, $\sigma_2 = 39$, $\sigma_3 = 45$ et $\sigma_4 = 51$.

La démonstration se fait en deux étapes, détaillées en annexe :

1. En se servant de la bijection réciproque de \mathcal{B} , on partitionne \mathfrak{S}_n en deux ensembles sympathiques. Cela permet de montrer que (σ_i) est une suite arithmétique et de calculer sa raison.
2. En transportant le problème vers \mathfrak{S}_n , il est possible de calculer la somme des σ_i , somme qui est presque égale à la somme des inversions des permutations de \mathfrak{S}_n . Cela permet de calculer σ_1 .

On a alors :

Théorème 2.0.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [n]$. Lorsque i varie de 1 à n , les σ_i forment une suite arithmétique de raison $(n-1)!$ et de terme initial $\frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$.

3 Premier terme d'une bonne suite

Nous pouvons maintenant démontrer la première assertion mentionnée en introduction, à savoir qu'en moyenne, lorsque n est grand, le premier terme d'une bonne suite de longueur n est équivalent à $\frac{n}{4}$. En effet, ce nombre est égal à $\frac{\sigma_1}{n!}$. Or :

$$\frac{\sigma_1}{n!} = \frac{n^2 + n + 2}{4} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}.$$

On en déduit :

Théorème 3.0.6. En moyenne, le premier terme d'une bonne suite de longueur n est $\frac{n}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}$.

Deuxième partie

Nombre de 1 figurant dans une bonne suite

Nous allons montrer ici que le nombre moyen de 1 figurant dans une bonne suite de longueur n converge vers $e - 1$ lorsque n tend vers l'infini.

4 Longueur de la première descente

Une bijection permettra d'envoyer une bonne suite comportant k entiers 1 sur une permutation dont la longueur de la première descente est k , ce qui motive notre étude.

4.1 Vers une relation de récurrence

Définition 4.1.1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle $D(\sigma)$ la longueur de la première descente de σ :

$$D(\sigma) = \max\{k \in [n], \quad \forall i \in [k-1], \sigma(i) > \sigma(i+1)\}.$$

Par exemple, $D(653241) = 4$.

Le but est donc de calculer la somme $S_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} D(\sigma)$. Nous allons établir une relation de récurrence vérifiée par la suite (S_n) en examinant où se situe l'entier n dans les différentes permutations. Pour ce faire, une définition et quelques lemmes sont nécessaires.

Définition 4.1.2. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ et $i \in [n+1]$. On note $\mathcal{P}(\sigma(1) \cdots \sigma(i))$ l'unique permutation π vérifiant :

$$\text{pour tous } p, q \in [i], \quad \sigma(i) < \sigma(j) \iff \pi(i) < \pi(j).$$

Pour $\pi \in \mathfrak{S}_i$, on note $A_\pi = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}, \quad \mathcal{P}(\sigma(1) \cdots \sigma(i)) = \pi \text{ et } \sigma(i+1) = n+1\}$.

Par exemple, $\mathcal{P}(7253) = 4132$. Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 4.1.3. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_i$. Alors pour tout $\sigma \in A_\pi$, $D(\sigma) = D(\pi)$.

C'est en effet une conséquence de l'égalité $\sigma(i+1) = n+1$.

Lemme 4.1.4. Soient $\pi, \pi' \in \mathfrak{S}_i$. Alors $\text{Card } A_\pi = \text{Card } A_{\pi'}$.

Preuve. Construisons une injection de A_π dans $A_{\pi'}$. Soit $\sigma \in A_\pi$. On réordonne les i premiers éléments de σ : soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1}$ définie par : pour $j > i$, $\sigma'(j) = \sigma(j)$, et $\{\sigma'(1), \sigma'(2), \dots, \sigma'(i)\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\}$ avec $P(\sigma'(1), \dots, \sigma'(i)) = \pi'$. On vérifie facilement que $\sigma' \in A_{\pi'}$ et que l'application ainsi construite est injective, d'où le résultat en réitérant ce procédé avec tous les couples d'éléments de \mathfrak{S}_i . ■

Lemme 4.1.5. Soient $\pi \in \mathfrak{S}_i$. Alors $\text{Card } A_\pi = \frac{n!}{i!}$.

Preuve. On remarque que $\{A_\pi, \pi \in \mathfrak{S}_i\}$ constitue une partition de l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ vérifiant $\sigma(i+1) = n+1$. Or ces dernières permutations sont au nombre de $n!$. De plus, $\text{Card}\{A_\pi, \pi \in \mathfrak{S}_i\} = i!$, d'où le résultat d'après le lemme 4.1.4. ■

4.2 Une relation de récurrence

Grâce aux lemmes précédents, une relation de récurrence peut être établie :

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} D(\sigma) \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \sigma(1)=n+1}} D(\sigma) + \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \sigma(i)=n+1}} D(\sigma) \\
 &= (S_n + n!) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \sigma(i+1)=n+1}} D(\sigma(1) \cdots \sigma(i)) \\
 &= (S_n + n!) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \sigma(i+1)=n+1}} D(\mathcal{P}(\sigma(1) \cdots \sigma(i))) \quad \text{d'après le lemme 4.1.3} \\
 &= (S_n + n!) + \sum_{i=1}^n \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_i} (\text{Card } A_\pi) D(\pi) \quad \text{par définition de } A_\pi \\
 &= (S_n + n!) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{n!}{i!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_i} D(\pi) \right) \quad \text{d'après le lemme 4.1.5} \\
 &= (S_n + n!) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{n!}{i!} S_i \right)
 \end{aligned}$$

4.3 Une formule explicite

Théorème 4.3.1. *On a :*

$$S_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} D(\sigma) = n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$$

Preuve. La preuve se fait aisément par récurrence sur n . ■

Il vient immédiatement :

Corollaire 4.3.2. *On a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - 1$$

La longueur moyenne de la plus longue descente d'une permutation de longueur n converge donc vers $e - 1$ lorsque n tend vers l'infini.

5 Lien entre bonnes suites et sous-suites croissantes

Lemme 5.0.3. *Il existe une bijection de \mathfrak{S}_n sur \mathfrak{S}_n envoyant une permutation σ telle que $D(\sigma) = k$ sur une permutation dont la longueur de la plus longue sous-suite décroissante d'entiers consécutifs finissant par 1 est k .*

Preuve. La bijection qui associe à une permutation sa permutation inverse envoie une permutation σ telle que $D(\sigma) = k$ sur une permutation dont la longueur de la plus longue sous-suite décroissante d'entiers consécutifs finissant par 1 est k . ■

Lemme 5.0.4. *Il existe une bijection de \mathfrak{S}_n sur G_n envoyant une permutation σ telle que $D(\sigma) = k$ sur une bonne suite comportant k fois l'entier 1.*

Preuve. Il s'agit de la bijection $\sigma \mapsto (\mathcal{B}^{-1}(\sigma))^{-1}$, \mathcal{B} étant définie dans la première partie. ■

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 5.0.5. *On a :*

1. *En moyenne, le nombre de 1 figurant dans une bonne suite de longueur n converge vers $e-1$ lorsque n tend vers l'infini.*
2. *En moyenne, la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'entiers consécutifs commençant par 1 d'une permutation de longueur n converge vers $e-1$ lorsque n tend vers l'infini.*

Le deuxième point de ce théorème fait émerger une question naturelle : que ce passerait-il si l'on ôtait l'hypothèse « entiers consécutifs commençant par 1 » ? Autrement dit, que peut-on dire sur la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation ? La partie suivante répond à cette question.

Troisième partie

Étude de la longueur de la plus longue sous-suite croissante

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ une permutation de $[n]$. On dit que σ possède une sous-suite croissante de longueur k s'il existe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tels que $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)$. On note $l_n(\sigma)$ la longueur de la plus longue sous-suite croissante de σ . On écrit parfois $l(\sigma)$ s'il n'y a pas de confusion possible. Par exemple, en écrivant les permutations en ligne, pour $\sigma = \underline{1}, \underline{4}, \underline{6}, \underline{5}, \underline{2}, \underline{7}, \underline{8}, \underline{3}$, il vient $l(\sigma) = 5$, valeur qui est atteinte pour les deux sous-suites croissantes $1, 4, 6, 7, 8$ et $1, 4, 5, 7, 8$.

Un théorème classique d'Erdős-Szekeres (1932) [6] affirme que si $\sigma \in \mathfrak{S}_{pq+1}$, alors σ possède soit une sous-suite croissante de longueur $\geq p + 1$, soit une sous-suite décroissante de longueur $\geq q + 1$. Ulam (1961) a étudié le comportement de $l_n(\sigma)$, considérée comme une variable aléatoire sur l'espace des permutations muni de la loi uniforme. Il a été amené à conjecturer que l'espérance $E[l_n]$ de cette variable aléatoire était équivalente à $1.7\sqrt{n}$ au voisinage de l'infini. Hammersley (1972) a été le premier à se consacrer sérieusement à l'estimation de $E[l_n]$. Il a démontré [7] l'existence de

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E[l_n]}{\sqrt{n}}$$

et la double inégalité $\frac{\pi}{2} \leq c \leq e$. Finalement, Vershik-Kerov [8] et Logan-Shepp [9] ont, indépendamment, respectivement montré en 1977 que $c = 2$ et $c \geq 2$. Ce domaine de recherche est actuellement en pleine effervescence, suite à un théorème de Baik, Deift et Johansson (1999) [10] qui relie $E[l_n]$ à la plus grande valeur propre de matrices hermitiennes $n \times n$ particulières.

Dans cette partie, nous démontrons que $1 \leq c \leq 2$, sous réserve d'existence de c . Les deux inégalités sont une conséquence de la très riche correspondance de Robinson-Schensted entre permutations et tableaux de Young standards. Nous donnons ensuite un argument heuristique qui établit l'inégalité $c \geq 2$ et effleurons l'inscription du problème de l'estimation de $E[l_n]$ dans le cadre plus général des matrices aléatoires.

6 Encadrement de $E[l_n]$

6.1 La correspondance de Robinson-Schensted

6.1.1 Définitions

La correspondance de Robinson-Schensted joue un rôle prépondérant dans l'étude des sous-suites croissantes et dévoile un lien intime entre partitions et permutations. Elle a été introduite par Schensted en 1961 [11]. Nous définissons d'abord quelques notions avant de présenter la correspondance proprement dite.

Définition 6.1.1. Une *partition* λ de n est une suite

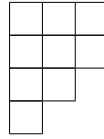
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l),$$

vérifiant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$. Si λ est une partition de n , on note alors $\lambda \vdash n$.

Par exemple, $\lambda = (3, 1, 1)$ est une partition de 5.

Définition 6.1.2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$. Le *diagramme de Young de forme λ* , est un tableau de cases constitué de l lignes alignées à gauche, la ligne i contenant λ_i points.

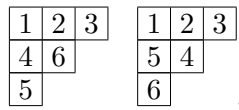
Par exemple, le diagramme de Young de $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ est :



Définition 6.1.3. Soit $\lambda \vdash n$. Un *tableau de Young de forme λ* , ou encore *λ -tableau* est un diagramme de Young de λ dans lequel on a inscrit tous les entiers entre 1 et n , chacun apparaissant une unique fois.

Un tableau de Young t est *standard* si les éléments de n'importe quelle ligne ou colonne forment une suite croissante.

Par exemple, parmi les deux tableaux



le premier est standard mais le second ne l'est pas.

La correspondance de Robinson-Schensted est une bijection entre l'ensemble des permutations et les couples de tableaux de Young standards de même forme. Nous allons donc associer une permutation à un couple de tableaux de Young standards de même forme, et réciproquement.

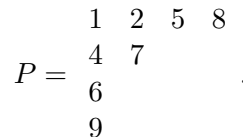
6.1.2 Algorithme d'insertion

Définition 6.1.4. Un *tableau partiel* est un tableau dont les lignes et les colonnes sont croissantes.

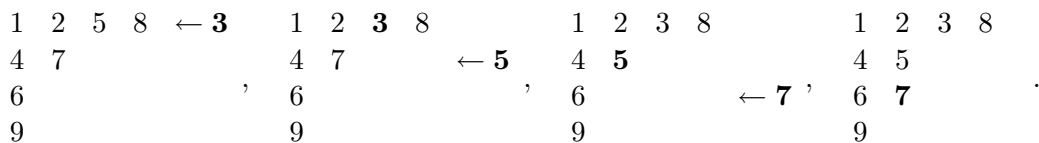
Étant donné un tableau partiel P et un entier x n'appartenant pas à P , nous décrivons comment *insérer* x dans P :

Assigner $R :=$ la première ligne de P
Tant que il existe un élément de R supérieur à x **faire**
 ☞ Soit y le plus petit élément de R supérieur à x . Remplacer y par x dans le tableau.
 ☞ Assigner $x := y$ et $R :=$ la ligne suivante.
Fin Tant que
 Placer x en dernière position sur la ligne R .

Par exemple, insérons $x = 3$ dans le tableau



Nous mettons en gras les éléments qui sont remplacés ou déplacés lors de l'insertion.



Preuve. Pour prouver qu'il s'agit bien d'une bijection, il nous suffit de construire une application inverse. Étant donné (P_k, Q_k) nous déterminons (P_{k-1}, Q_{k-1}) et x_k d'après l'algorithme suivant (nous supposons qu'il existe une ligne au-dessus de la première ligne de P_k contenant uniquement des zéros pour simplifier l'algorithme), en notant $P_{i,j}$ l'entier se trouvant dans la case (i, j) de P_k :

Soit (i, j) la case dans laquelle se trouve k dans Q_k .

☞ Assigner $x := P_{i,j}$ et effacer $P_{i,j}$ du tableau.

☞ Assigner $R :=$ la $(i - 1)$ -ième ligne de P_k .

Tant que R n'est pas la 0-ième ligne de P_k **faire**

☞ Soit y le plus grand élément de R inférieur à x . Remplacer y par x dans R .

☞ Assigner $x := y$ et $R :=$ la ligne d'au-dessus.

Fin Tant que

Assigner $x_k := x$.

Il est facile de voir que P_{k-1} est P_k après avoir subi l'algorithme et que Q_{k-1} est Q_k à l'intérieur duquel nous avons supprimé k . La permutation est donc retrouvée en appliquant l'algorithme à (P_n, Q_n) jusqu'à (P_1, Q_1) . ■

La correspondance de Robinson-Schensted est donc bien une bijection entre l'ensemble des permutations et les couples de tableaux de Young standards de même forme. En particulier, en notant f^λ pour le nombre de tableaux de Young standards de forme λ , on en déduit :

Théorème 6.1.6. *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

6.2 Propriétés de la correspondance de Robinson-Schensted

On démontre ici des résultats qui dévoilent l'intérêt de cette correspondance.

On peut naturellement définir une insertion en termes de colonnes en remplaçant dans tout ce qui précède le terme « ligne » par « colonne ». Si l'insertion par colonne de x dans le tableau P fournit un tableau P' , alors on note $c_x(P) = P'$.

Proposition 6.2.1. *Soit P un tableau partiel et $x, y \notin P$. Alors :*

$$c_y r_x(P) = r_x c_y(P).$$

Preuve. La preuve ne présente pas de difficulté majeure, mais nécessite une étude détaillée de nombreux cas, ce qui est fait dans [12]. On ne la présente donc pas ici. ■

Si $\pi = x_1 x_2 \dots x_n$, on note $\pi^r = x_n x_{n-1} \dots x_1$ la permutation « renversée » de π . Il vient alors d'après la proposition précédente le théorème suivant.

Théorème 6.2.2. *Si $P(\pi) = P$, alors $P(\pi^r) = P^t$, où t désigne la transposition.*

Preuve. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
P(\pi^r) &= r_{x_1} \cdots r_{x_{n-1}} r_{x_n}(\emptyset) && \text{(par définition)} \\
&= r_{x_1} \cdots r_{x_{n-1}} c_{x_n}(\emptyset) && \text{(le tableau initial est vide)} \\
&= c_{x_n} r_{x_1} \cdots r_{x_{n-1}} && \text{(d'après la proposition précédente)} \\
&\vdots \\
&= c_{x_n} c_{x_{n-1}} \cdots c_{x_1}(\emptyset) && \text{(par récurrence)} \\
&= P^t && \text{(par définition de l'insertion par colonnes)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Dans ce qui suit, on note P_{k-1} le tableau obtenu après $k - 1$ insertions en appliquant l'algorithme de Robinson-Schensted.

Lemme 6.2.3. *Soit $\pi = x_1 x_2 \dots x_n$. Si x_k est inséré dans la colonne j dans P_{k-1} , alors la plus longue sous-suite croissante de π qui se termine en x_k est de longueur j .*

Preuve. On raisonne par récurrence sur k . Le résultat est clair pour $k = 1$, supposons le acquis pour toutes les valeurs inférieures ou égales à $k - 1$.

Montrons d'abord qu'il existe une sous-suite croissante de longueur j qui se termine en x_k . Soit y l'élément de P_{k-1} qui se trouve dans la case $(1, j - 1)$. Puisque x_k est inséré dans la j -ième colonne, on a $y < x_k$. Par récurrence, il existe donc une sous-suite croissante σ de longueur $j - 1$ qui se termine en y . La sous-suite σx_k est alors une sous-suite croissante de longueur j se terminant en x_k .

Par l'absurde, supposons maintenant qu'il existe une sous-suite croissante de longueur strictement plus grande que j et qui se termine en x_k . Soit x_i l'élément qui précède x_k dans cette sous-suite. Par hypothèse de récurrence, x_i est inséré dans la case $(1, m)$ avec $j \leq m$. Soit y l'élément se situant dans la case $(1, j)$. Le tableau P_{k-1} étant partiel, on a $y \leq x_i$. Or $x_i < x_k$. Donc $y < x_k$. Or x_k est inséré dans la case $(1, j)$, ce qui signifie qu'il doit bousculer y vers la seconde ligne, ce qui est absurde car un entier ne bouscule jamais un élément plus petit. ■

En combinant le théorème 6.2.2 et le lemme 6.2.3, il vient :

Théorème 6.2.4. *Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. La longueur de la plus longue sous-suite croissante de π est égale à la longueur de la première ligne de $P(\pi)$, et la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de π est égale à la longueur de la première colonne de $P(\pi)$.*

6.3 Une minoration de $E[l_n]$

La correspondance de Robinson-Schensted permet de démontrer aisément le théorème d'Erdős-Szekeres, théorème qui fournira la minoration souhaitée.

Théorème 6.3.1 (Théorème d'Erdős-Szekeres). *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_{pq+1}$, alors σ est soit une sous-suite croissante de longueur $\geq p + 1$, soit une sous-suite décroissante de longueur $\geq q + 1$.*

Preuve. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{pq+1}$. Comme $P(\sigma)$ possède $pq + 1$ cases, il s'ensuit que $P(\sigma)$ possède soit une ligne de longueur $\geq p + 1$, soit une colonne de longueur $\geq q + 1$, car dans le cas contraire il serait constitué d'au plus pq cases. Le théorème 6.2.4 permet immédiatement de conclure. ■

Soit $d(\sigma)$ la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de σ . En adaptant légèrement la preuve précédente, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.3.2. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors :*

$$l(\sigma)d(\sigma) \geq n.$$

Cette inégalité permet de réaliser une minoration de $E[l_n]$.

Théorème 6.3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\frac{E[l_n]}{\sqrt{n}} \geq 1.$$

Preuve. D'après le corollaire 6.3.2 :

$$E[l_n] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\frac{l(\sigma) + l(\sigma^r)}{2} \right) \geq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sqrt{l(\sigma)l(\sigma^r)} \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sqrt{l(\sigma)d(\sigma)} \right) \geq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sqrt{n} \geq \sqrt{n}.$$

■

6.4 Une majoration de $E[l_n]$

Nous présentons ici l'approche de Pilpel (1990) [13] en modifiant légèrement la démonstration de son deuxième argument. Dans ce qui suit, on munit \mathfrak{S}_n de la loi uniforme.

6.4.1 Une formule de calcul pour $E[l_n]$

Définition 6.4.1. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. On note $F_n(\pi)$ le plus petit entier finissant une sous-suite croissante de longueur $l_n(\pi)$ (c'est-à-dire de longueur maximale).

Par exemple, si $\pi = (1, 2, 4, 3)$, il y a deux sous-suites croissantes de longueur maximale qui sont $1, 2, 4$ et $1, 2, 3$. Ainsi, $F_4(\pi) = 3$.

Les raisonnements qui suivent sont tous fondés sur une idée commune qui consiste à séparer \mathfrak{S}_n en deux parties, suivant que $F_n(\pi) = n$ ou non.

Théorème 6.4.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$E[l_n] = E[l_{n-1}] + P(F_n = n),$$

$$\text{où } P(F_n = n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_n \\ F_n(\pi) = n}} 1.$$

Preuve. Pour $n = 2$ le résultat est vérifié. Supposons donc $n \geq 3$. Posons ensuite

$$J_n = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} l_n(\pi),$$

de sorte que $E[l_n] = J_n/n!$. Soit H_n le nombre de permutations $\pi \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant $F_n(\pi) = n$. Ainsi $P(F_n = n) = H_n/n!$.

Pour une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_{n+1}$, notons π^* la permutation obtenue en supprimant l'apparition de $n+1$ dans π . Il vient immédiatement que pour $\pi \in \mathfrak{S}_{n+1}$, deux cas se présentent :

- (i) Si $F_{n+1}(\pi) = n+1$, alors $l_n(\pi^*) = l_{n+1}(\pi) - 1$.
- (ii) Si $F_{n+1}(\pi) \leq n$, alors $l_n(\pi^*) = l_{n+1}(\pi)$.

De plus, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{S}_{n+1} &\rightarrow \mathfrak{S}_n \\ \pi &\mapsto \pi^* \end{aligned}$$

est telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\text{Card}(\Phi^{-1}(\{\sigma\})) = n + 1$. Par conséquent :

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1}} l_n(\pi^*) = (n + 1)J_n.$$

Mais, par définition, le cas (i) se présente H_{n+1} fois. Ainsi :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1}} l_{n+1}(\pi) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \text{cas (i)}}} l_{n+1}(\pi) + \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \text{cas (ii)}}} l_{n+1}(\pi) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \text{cas (i)}}} (l_n(\pi^*) + 1) + \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \text{cas (ii)}}} l_n(\pi^*) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1}} l_n(\pi^*) + \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \text{cas (i)}}} 1 \\ &= (n + 1)J_n + H_{n+1}. \end{aligned}$$

La division de chacun des termes par $(n + 1)!$ permet de conclure. ■

Une récurrence mène alors au résultat suivant.

Corollaire 6.4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$E[l_n] = \sum_{j=1}^n P(F_j = j).$$

6.4.2 Retour aux tableaux de Young

Proposition 6.4.4. *Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Alors $F_n(\pi)$ est l'entier qui se trouve sur la dernière colonne de la première ligne de $P(\pi)$.*

Preuve. D'après le lemme 6.2.3, on sait que, par définition, $F_n(\pi)$ est inséré dans la $l(\pi)$ -ième colonne de $P(\pi)$ en cours de processus. D'après le théorème 6.2.4, la première ligne de $P(\pi)$ comportera $l(\pi)$ éléments à l'état final.

Raisonnons par l'absurde : si $F_n(\pi)$ n'est pas l'entier qui se trouve sur la dernière colonne de la première ligne de $P(\pi)$, c'est donc qu'il existe une étape pendant laquelle $F_n(\pi)$ est basculé vers la seconde ligne par un certain entier k . D'après l'algorithme, $k < F_n(\pi)$ et comme k est inséré dans la $l(\pi)$ -ième colonne, il existe une sous-suite croissante de longueur $l(\pi)$ se terminant par k . Cela contredit la minimalité de $F_n(\pi)$, ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 6.4.5. *Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Alors $F_n(\pi) = n$ si, et seulement si, la dernière colonne de $P(\pi)$ ne contient qu'un seul entier qui est n .*

Définition 6.4.6. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ une partition de n . On note λ^* la partition $(\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

Pour $\lambda \vdash n$, on rappelle que l'on note f^λ le nombre de tableaux de Young standards de forme λ .

Lemme 6.4.7. *On a :*

$$P(F_n = n) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash (n-1)} f^\lambda f^{\lambda^*}.$$

Preuve. D'après le corollaire 6.4.5 et le caractère bijectif de la correspondance de Robinson-Schensted :

$$P(F_n = n) = \sum_{\lambda \vdash (n-1)} \frac{\left(\begin{array}{c} \text{nombre de P-tableaux de forme } \lambda^*, \\ n \text{ étant en dernière colonne de la première ligne} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{nombre de Q-tableaux} \\ \text{de forme } \lambda^* \end{array} \right)}{n!}.$$

Or le nombre de P-tableaux de forme λ^* , n étant en dernière colonne de la première ligne, est égal à f^λ , et le nombre de Q-tableaux de forme λ^* est égal f^{λ^*} . Le résultat en découle. ■

6.4.3 Une majoration de $E[l_n]$

Lemme 6.4.8. On a :

$$P(F_n = n) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Preuve. D'une part, d'après le théorème 6.1.6 :

$$\sum_{\lambda \vdash (n-1)} n (f^\lambda)^2 = n!.$$

D'autre part, il est clair que :

$$\sum_{\lambda \vdash (n-1)} (f^{\lambda^*})^2 \leq \sum_{\mu \vdash n} (f^\mu)^2 = n!.$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{\lambda \vdash (n-1)} \sqrt{n} f^\lambda f^{\lambda^*} \right)^2 \leq \left(\sum_{\lambda \vdash (n-1)} n (f^\lambda)^2 \right) \left(\sum_{\lambda \vdash (n-1)} (f^{\lambda^*})^2 \right) \leq (n!)^2.$$

Finalement, d'après le lemme 6.4.7 :

$$P(F_n = n) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash (n-1)} f^\lambda f^{\lambda^*} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Théorème 6.4.9. On a :

$$\frac{E[l_n]}{\sqrt{n}} \leq 2.$$

Preuve. En utilisant l'inégalité bien connue $1/\sqrt{n} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, le corollaire 6.4.3 et le lemme 6.4.8 permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} E[l_n] &= \sum_{j=1}^n P(F_j = j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^n (\sqrt{j} - \sqrt{j-1}) \\ &= 2\sqrt{n} \end{aligned}$$

En définitive, nous avons ici montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq \frac{E[l_n]}{\sqrt{n}} \leq 2.$$

7 Vers un équivalent de $E[l_n]$

Nous présentons un argument heuristique permettant d'obtenir l'équivalent souhaité. D'après le théorème 6.2.4 :

$$E[l_n] = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \lambda_1 (f^\lambda)^2 \quad (7.1)$$

D'après le théorème 6.1.6 :

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 \quad (7.2)$$

Remarquons que le nombre de termes dans le membre de droite de (7.2) est beaucoup plus petit que $n!$. Ainsi, la valeur maximale de f^λ pour $\lambda \vdash n$ est proche de $\sqrt{n!}$. Notons λ^{\max} la valeur de $\lambda \vdash n$ qui maximise f^λ . Par (7.1), une bonne approximation de $E[l_n]$ est donc :

$$E[l_n] \approx \frac{1}{n!} (\lambda^{\max})_1 (f^{\lambda^{\max}})^2 \approx (\lambda^{\max})_1.$$

Il s'agit donc bien de déterminer la partition λ^{\max} qui maximise f^λ pour $\lambda \vdash n$.

Effectuons une rotation d'angle $\pi/2$ sur nos tableaux de Young et normalisons les en fixant la longueur d'une case à $1/\sqrt{n}$ pour que l'aire d'un tableau soit égale à un. Des essais numériques suggèrent l'existence d'une courbe $y = \Psi(x)$ telle que lorsque n tend vers l'infini, la bordure du tableau de forme λ^{\max} « converge » vers la courbe $y = \Psi(x)$.

Vershik-Kerov [8] et Logan-Shepp [9] ont démontré ce résultat rigoureusement : ils ont prouvé l'existence de cette courbe et en ont même obtenu une expression paramétrique. Celle-ci est paramétrée par :

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \cos \theta \\ y &= \frac{2}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta), \end{aligned}$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

Une implémentation sous CAML permet de confirmer ce résultat, voir la figure 1. Le code du programme est disponible en annexe.

En remarquant que la courbe $y = \Psi(x)$ coupe l'axe des abscisses au point $x = 2$, on peut aisément se convaincre qu'alors :

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E[l_n]}{\sqrt{n}} \geq 2.$$

Ce résultat, combiné avec le théorème 6.4.9, « montre » finalement que :

$$\boxed{c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E[l_n]}{\sqrt{n}} = 2.}$$

Par ailleurs, il est remarquable que la courbe $y = \Psi(x)$ représente non seulement la forme de la partition qui maximise f^λ , mais aussi la forme *moyenne* d'une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$, la forme d'une partition étant la forme du tableau de Young engendré par l'algorithme de Robinson-Schensted. Une implémentation sous CAML confirme également ce résultat, voir la figure 2.

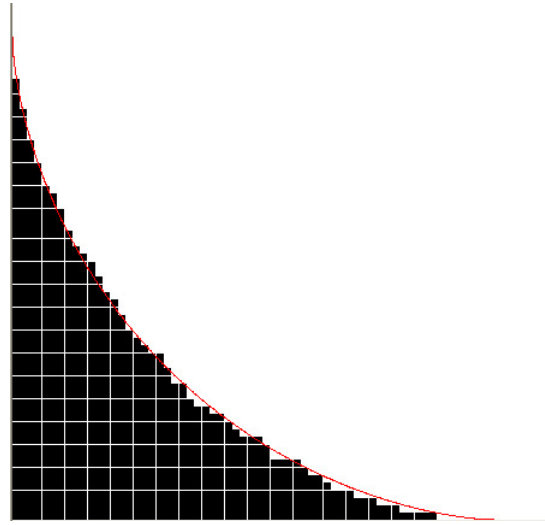


FIG. 1 – Forme d'un tableau maximisant f^λ pour $n = 1000$ parmi 200 formes de tableaux prises au hasard. La courbe $y = \Psi(x)$ est tracée en rouge.

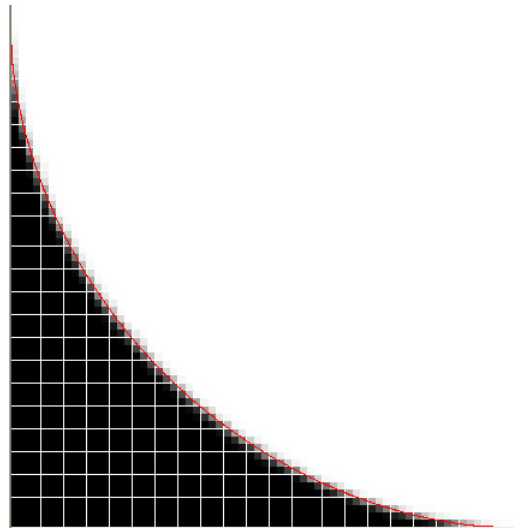


FIG. 2 – Forme moyenne de permutations de longueur $n = 1000$ effectuée sur 200 permutations aléatoires : plus le nombre de tableaux dans lesquels figure une case fixée est élevé, plus cette case est noircie. La courbe $y = \Psi(x)$ est tracée en rouge

8 Lien avec les matrices aléatoires

Le récent théorème (1999) de Baik, Deift et Johansson [10] constitue une généralisation de l'égalité $c = 2$ et se formule ainsi :

Théorème 8.0.10. *Soit $q(x)$ l'unique fonction solution de l'équation différentielle $q''(x) = xq(x) + 2q(x)^3$ et vérifiant :*

$$q(x) \sim -\frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \text{ en } +\infty.$$

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \exp\left(-\int_x^\infty (x-t)^2 q(t)^2 dt\right).$$

Alors :

$$P\left(\frac{l_n - 2n^{1/2}}{n^{1/6}} \leq x\right) \rightarrow F(x) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Signalons, à titre informatif seulement, que dans [14], Tracy et Widom (1994) ont étudié le comportement de la plus grande valeur propre (disons λ_n^*) d'une matrice aléatoire (en un sens qui dépasse largement le texte de ce rapport) $n \times n$ hermitienne et ont obtenu exactement le théorème précédent, avec l_n remplacé par λ_n^* . Cela révèle donc l'existence d'un lien intime entre longueur de la plus longue sous-suite croissante et valeurs propres d'une matrice aléatoire. Okounkov a généralisé ce résultat [15] en 2000, en démontrant que les longueurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ des formes des tableaux de Young standard associés aux permutations de longueur n sont distribuées de la même manière que les première, deuxième, troisième, etc. valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour conclure, signalons que l'étude de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation se situe à l'intersection de nombreux domaines des mathématiques, qui sont entre autres :

- la combinatoire énumérative, par l'essence même de l'algorithme de Robinson Schensted,
- le monde des modèles matriciels aléatoires, par le truchement des matrices aléatoires,
- et enfin la théorie de la représentation, parce que fondamentalement f^λ est aussi égal la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique associée à la partition λ .

9 Annexe A : Compléments

Nous démontrons ici la conjecture mentionnée précédemment dans la première partie en introduisant la bijection inverse de \mathcal{B} .

9.1 Bijection inverse de \mathcal{B}

Définition 9.1.1. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. On pose $\phi_\pi = \{j \in [n-1] \mid j+1 \text{ apparaît à la gauche de } j \text{ dans } \pi\}$ et $C_\pi(x) = \text{Card}\{j \in \phi_\pi \mid j < x\}$.

La bijection inverse est alors construite de la manière suivante (voir [3]) :

Proposition 9.1.2. Soient $\pi = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathfrak{S}_n$ et u la suite obtenue en remplaçant tout élément a_i de π par $a_i - C_\pi(a_i)$. Alors $u = \mathcal{B}^{-1}(\pi)$.

9.2 Suite arithmétique et σ_i

Nous sommes maintenant en mesure de poursuivre la démonstration. Nous montrons d'abord la conjecture 2.0.4 pour ensuite calculer la raison de la suite arithmétique ainsi que σ_1 . Dans toute la suite de ce texte, nous fixons un entier strictement positif n .

Un entier $i \in [n-1]$ étant fixé, nous allons partitionner l'ensemble des couples *non ordonnés* d'éléments de \mathfrak{S}_n en deux parties, \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' , vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tous $\{\pi, \pi'\} \in \mathfrak{P}$, $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 0$, où $u = \mathcal{B}^{-1}(\pi)$ et $u' = \mathcal{B}^{-1}(\pi')$,
2. Pour tous $\{\pi, \pi'\} \in \mathfrak{P}'$, $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 1$, où $u = \mathcal{B}^{-1}(\pi)$ et $u' = \mathcal{B}^{-1}(\pi')$.

Ces conditions nous fournissent alors $\sigma_{i+1} = \sigma_i + \text{Card}(\mathfrak{P}')$. Nous montrons en outre que $\text{Card}(\mathfrak{P}') = (n-1)!$, ce qui conclut car \mathcal{B}^{-1} réalise une bijection de \mathfrak{S}_n vers G_n . Plus précisément :

Lemme 9.2.1. Soient $i \in [n-1]$ et $u \in G_n$. On pose $\pi = \mathcal{B}(u)$ et $\pi' = \pi(i, i+1)$, autrement dit π' s'obtient en transposant $\pi(i)$ et $\pi(i+1)$. Soit finalement $u' = \mathcal{B}^{-1}(\pi')$. Alors :

1. Si $|\pi(i+1) - \pi(i)| \neq 1$, alors $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 0$,
2. Si $|\pi(i+1) - \pi(i)| = 1$, alors $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 1$.

Preuve. 1. Puisque $|\pi(i+1) - \pi(i)| = |\pi'(i+1) - \pi'(i)| \neq 1$, on a $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$. La proposition 9.1.2 montre donc que $u(i) = u'(i+1)$ ainsi que $u(i+1) = u'(i)$. Le résultat en découle.

2. Supposons d'abord que $\pi(i+1) - \pi(i) = 1$. Cela implique que $\pi(i) \notin \phi_\pi$, puis que $C_\pi(\pi(i)) = C_\pi(\pi(i+1))$ et enfin que $u(i+1) - u(i) = 1$, d'après la proposition 9.1.2.

Supposons ensuite que $\pi(i) - \pi(i+1) = 1$. Cela implique que $\pi(i) \in \phi_\pi$, puis que $C_\pi(\pi(i)) = C_\pi(\pi(i+1)) + 1$ et enfin que $u(i+1) - u(i) = 0$, d'après la proposition 9.1.2. ■

Nous affirmons la proposition suivante :

Proposition 9.2.2. Soit i un entier entre 1 et $n-1$. Alors $\sigma_{i+1} = \sigma_i + (n-1)!$.

Preuve. Nous explicitons les deux parties \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' . On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \{ \{ \pi, \pi(i, i+1) \} \mid \pi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \pi(i) \leq \pi(i+1) - 2 \}, \\ \mathfrak{P}' &= \{ \{ \pi, \pi(i, i+1) \} \mid \pi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \pi(i) = \pi(i+1) - 1 \}. \end{aligned}$$

Le lemme 9.2.1 nous assure que cette partition possède la propriété voulue. Il nous reste donc à calculer $\text{Card}(\mathfrak{P}')$.

Or se donner un élément de \mathfrak{P}' , c'est se donner un entier $\pi(i)$ entre 1 et $n-1$, qui impose une valeur à $\pi(i+1)$, et $n-2$ éléments restants, qui eux forment un élément de \mathfrak{S}_{n-2} . Par suite, $\text{Card}(\mathfrak{P}') = (n-1)(n-2)! = (n-1)!$, ce qui achève la démonstration. ■

Par exemple, dans le cas où $n=4$ et $i=3$, on pourra vérifier que :

$$\mathfrak{P} = \{\{1324, 1342\}, \{2314, 2341\}, \{2413, 2431\}, \{3124, 3142\}, \{3214, 3241\}, \{4213, 4231\}\},$$

$$\mathfrak{P}' = \{\{1234, 1243\}, \{1423, 1432\}, \{2134, 2143\}, \{3412, 3421\}, \{4123, 4132\}, \{4312, 4321\}\},$$

et voir qu'on a bien $\text{Card } \mathfrak{P}' = (4-1)! = 6$.

La conjecture 2.0.4 devient alors un corollaire immédiat de la proposition 9.2.2.

9.3 Calcul de la somme totale des éléments et de σ_1

Posons $S = \sum_{i=1}^n \sigma_i$. Puisque la suite (σ_i) est arithmétique, il suffit de connaître S pour déterminer σ_1 . Pour y parvenir, nous avons besoin de deux définitions et de quelques résultats intermédiaires.

Définition 9.3.1. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Une *descente* de π est un entier i vérifiant $\pi(i) > \pi(i+1)$. L'ensemble des descentes de π est noté $\text{Des}(\pi)$. L'*indice majeur* de π , noté $\text{maj}(\pi)$, est la somme de toutes les descentes de π .

Définition 9.3.2. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Une *inversion* de π est un couple (i, j) vérifiant $i < j$ et $\pi(i) > \pi(j)$. Le nombre total d'inversions de π est noté $\text{inv}(\pi)$.

Lemme 9.3.3. Il existe une bijection de G_n vers \mathfrak{S}_n envoyant $u \in G_n$ sur $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\sum_{i=1}^n u(i) = \text{inv}(\pi) + n.$$

Preuve. D'après [3], il existe une bijection¹ de G_n vers \mathfrak{S}_n envoyant $u \in G_n$ sur $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sum_{i=1}^n u(i) = \text{maj}(\sigma) + n$. Or d'après [16, 17], il existe une bijection de \mathfrak{S}_n sur lui-même² qui envoie σ sur π telle que $\text{maj}(\sigma) = \text{inv}(\pi)$. Il suffit de composer ces deux bijections pour obtenir le résultat souhaité. ■

Lemme 9.3.4. L'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \text{inv}(\pi) = \frac{n(n-1)n!}{4}.$$

Preuve. Étant donné $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on note $r(\pi)$ la permutation « retournée » de π , qui s'obtient en écrivant les éléments de π en sens inverse. Il est alors clair que $\text{inv}(\pi) + \text{inv}(r(\pi)) = \frac{n(n-1)}{2}$. Comme r est une bijection de \mathfrak{S}_n sur lui-même :

$$2 \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \text{inv}(\pi) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\text{inv}(\pi) + \text{inv}(r(\pi))) = \frac{n(n-1)n!}{2},$$

et le résultat s'ensuit. ■

¹Cette bijection est en fait celle qui envoie u sur $r(\mathcal{B}(u)^{-1})$ où r est la bijection de « retournement » définie ultérieurement, voir [3].

²MacMahon a montré l'existence de cette bijection dans [16]. Celle-ci a effectivement été construite par Foata et Schützenberger dans [17].

Proposition 9.3.5. *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$S = \frac{n(n+3)n!}{4}.$$

Preuve. D'après les lemmes 9.3.3 et 9.3.4 :

$$S = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\text{inv}(\pi) + n) = \frac{n(n-1)n!}{4} + nn! = \frac{n(n+3)n!}{4}.$$

■

Connaissant S et la raison de la suite, il est immédiat de trouver que $\sigma_1 = \frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$. En conclusion, nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 9.3.6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [n]$. On pose $\sigma_i = \sum_{u \in G_n} u(i)$, où $u(i)$ est l'entier en i -ième position dans la bonne suite u . Alors, lorsque i varie de 1 à n , les σ_i forment une suite arithmétique de raison $(n-1)!$ et de terme initial $\frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$.*

10 Annexe B : vérification des propriétés de la courbe $y = \Psi(x)$ sous CAML

On stocke un tableau de Young à l'intérieur d'une matrice de taille plus grande. Les éléments de la première ligne et colonne valent 0 et fixent le « contour » du tableau. Une case qui ne fait pas partie du tableau de Young contient l'élément ∞ qui sera ici l'entier `maxint`. On prendra pour `maxint` la longueur de la permutation augmentée d'une unité.

On commence par ouvrir la fenêtre graphique :

```
1 #open "graphics";;
2 open_graph "600x500+10+10";;
```

```
1 (*permute : int -> int vect*)
2
3 let permute n =
4   let v = make_vect n 0 in
5   let echange i j = let tmp=v.(i) in v.(i)<-v.(j); v.(j)<-tmp in
6   for i = 0 to (n-1) do v.(i) <- (i+1) done;
7
8   let rec aux i =
9     if i>0 then
10      (echange i (random__int (i+1)));
11      aux (i-1);)
12   in
13   aux (vect_length v - 1);
14 v;;
```

☞ `permute n` renvoie de manière aléatoire une permutation de longueur `n` en une complexité en $\mathcal{O}(n)$.


```
1 (* init : int -> int vect vect*)
2
3 let init nmaxi =
4   let m = make_matrix nmaxi nmaxi nmaxi in
5   for i=0 to nmaxi-1 do
6     m.(0).(i)<-0;
7     m.(i).(0)<-0;
8   done;
9 m;;
```

☞ `init nmaxi` renvoie une matrice `nmaxi` \times `nmaxi` initialisée à `nmaxi`, sauf la première ligne et colonne qui contiennent 0 en une complexité en $\mathcal{O}(nmaxi^2)$.

```

1 (*insere : 'a -> 'a vect vect -> 'a -> int * int*)
2
3 let insere elt t maxint=
4 let j= ref 1 in (*j: indice de colonne *)
5   let rec aux i x =
6     j:=1;
7     while x>t.(i).(j) do j:=!j+1 done;
8     let y=t.(i).(j) in
9       t.(i).(j)<-x;
10      if y=maxint then (i,!j) else aux (i+1) y
11   in
12 aux 1 elt;;


```

 insere elt t maxint insère (au sens de Robinson-Schensted) l'élément `elt` dans le tableau `t` par le truchement d'une fonction auxiliaire récursive `aux i x`. Celle-ci insère `x` dans la `i`-ème ligne du tableau. En définitive, le tableau `t` est modifié et `insere elt t maxint` renvoie la case dans laquelle l'insertion a fini.

```

1 (*forme : int vect -> int vect*)
2
3 let forme perm =
4 let n= vect_length perm and maxint = (vect_length perm +1)in
5 let form = make_vect n 0 in
6   let p = (init maxint) in
7   for i=0 to (n-1) do
8     let insertion = insere perm.(i) p maxint in
9     form.(fst insertion - 1) <- form.(fst insertion -1) +1
10  done;
11 form;;

```

 `forme perm` renvoie la forme du tableau de Young $P(\text{perm})$ par application de l'algorithme de Robinson-Schensted en une complexité dans le pire des cas en $\mathcal{O}(l^2)$, où l est la longueur de `perm`.

```

1 (* draw_matrix : int vect vect -> unit *)
2
3 let draw_matrix matrix =
4 let d = 200. and sample = matrix.(0).(0) and n= vect_length matrix in
5 let pas = d /. (sqrt(float_of_int n)) in
6
7 for i = 0 to n-1 do
8   for j = 0 to n-1 do
9     set_color (rgb (255*(sample-matrix.(i).(j))/sample)
10              (255*(sample-matrix.(i).(j))/sample)
11              (255*(sample-matrix.(i).(j))/sample));
12   fill_rect (int_of_float(float_of_int(i)*.pas))
13             (int_of_float(float_of_int(j)*.pas))

```

```

14         (int_of_float pas) (int_of_float pas);
15     done;
16 done;;

```

☞ `draw_matrix matrix` représente graphiquement la matrice `matrix` en teintes de gris, la case de coordonnées (i, j) étant d'autant plus foncée que la valeur `matrixi,j` est élevée, en une complexité en $\mathcal{O}(l^2)$, où l est la taille de `matrix`.

```

1 (*draw_all : int -> int -> unit*)
2
3 let draw_all n sample =
4     let matrix = make_matrix n n 0 in
5     let dowork v =
6         let i = ref 0 in
7         while v.(!i) != 0 && !i < n do
8             for j=0 to v.(!i)-1 do matrix.(!i).(j) <- matrix.(!i).(j) +1 done;
9             incr i
10        done;
11    in
12
13 for k = 1 to sample do
14 dowork (forme (permute n))
15 done;
16 draw_matrix matrix;;

```

☞ `draw_all n sample` représente graphiquement la forme moyenne de `sample` permutations aléatoires de longueur `n` en une complexité dans le pire des cas en $\mathcal{O}(sample \times n^2)$.

```

1 (* draw_tableau : int vect -> unit *)
2
3 let draw_tableau form =
4 let i= ref 0 and d = 200. and n= vect_length form in
5 let pas = d /. (sqrt(float_of_int n)) in
6 while !i <= n-1 && form.(!i) != 0 do
7     for j = 0 to n-1 do
8         if j+1 <= form.(!i) then
9             ( set_color (rgb 0 0 0);
10              fill_rect (int_of_float(float_of_int(!i)*.pas))
11                      (int_of_float(float_of_int(j)*.pas))
12                      (int_of_float pas)
13                      (int_of_float pas)
14              )
15         done;
16 incr i;
17 done;;

```

☞ `draw_tableau form` représente graphiquement un diagramme de Young de forme `form` en une complexité en $\mathcal{O}(l^2)$, où l est l'entier dont `form` est une partition.

```

1 (*draw_curve : int -> unit*)
2
3 let draw_curve n =
4 let pi = 3.141592653 in
5 for k = 0 to n do
6   let t= pi *. (float_of_int k) /. (float_of_int n) in
7   let y = 2. /. pi *. (sin t -. t *. cos t ) in
8   let x= y +. 2. *. cos t in
9   set_color red;
10  plot (int_of_float (200. *. x)) (int_of_float (200. *. y));
11 done;;

```

☞ `draw_curve` trace la courbe $y = \Psi(x)$ avec un pas de `n` en une complexité en $\mathcal{O}(n)$.

Concrètement, l'appel :

```

#draw_all 1000 200;
draw_curve 1000;;

```

a permis d'obtenir la figure 1 (page 21).

Exemple d'utilisation d'autres fonctions :

```

#let a = permute 10;;
a : int vect = [|1; 7; 10; 9; 6; 2; 8; 4; 3; 5|]
#forme a;;
- : int vect = [|4; 2; 2; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0|]

```

11 Annexe C : Programmation de l'algorithme de Robinson-Schensted

Rappelons que l'on stocke un tableau de Young à l'intérieur d'une matrice de taille plus grande. Les éléments de la première ligne et colonne valent 0 et fixent le « contour » du tableau. Une case qui ne fait pas partie du tableau de Young contient l'élément ∞ qui sera ici l'entier `maxint`. On prendra pour `maxint` la longueur de la permutation augmentée d'une unité.

```
1 (*init : int -> int vect vect = <fun>*)
2
3 let init nmaxi =
4   let m = make_matrix nmaxi nmaxi nmaxi in
5   for i=0 to nmaxi-1 do
6     m.(0).(i)<-0;
7     m.(i).(0)<-0;
8   done;
9 m;;
```

☞ `init nmaxi` renvoie une matrice $nmaxi \times nmaxi$ initialisée à `nmaxi`, sauf la première ligne et colonne qui contiennent 0 en une complexité en $\mathcal{O}(nmaxi^2)$.

```
1 (* display : int vect vect -> 'a -> int -> unit = <fun> *)
2
3 let display matrice nmaxi maxint=
4 print_newline ();
5   for i=1 to maxint - 1 do
6     for j=1 to maxint - 1 do
7       let aux = matrice.(i).(j) in
8       if aux != maxint then ( print_int aux ; print_string "␣"; )
9     done;
10    if matrice.(i).(1) != maxint then print_newline ();
11  done;;
```

☞ `display matrice nmaxi maxint` affiche la sous-matrice de taille $maxint-1 \times maxint-1$ de `matrice` en une complexité en $\mathcal{O}(maxint^2)$. Les entiers égaux à `maxint` ne sont pas affichés.

```
1 (* insere : 'a -> 'a vect vect -> 'a -> int * int = <fun> *)
2
3 let insere elt t maxint=
4 let j= ref 1 in
5   let rec aux i x =
6     j:=1;
7     while x>t.(i).(j) do j:=!j+1 done;
8     let y=t.(i).(j) in
9     t.(i).(j)<-x;
10    if y=maxint then (i,!j) else aux (i+1) y
11   in
12 aux 1 elt;;
```

☞ `insere elt t maxint` insère l'élément `elt` dans le tableau `t` par le truchement d'une fonction auxiliaire récursive aux `i x`. Celle-ci insère `x` dans la `i`-ème ligne du tableau. Au final, le tableau `t` est modifié et `insere elt t maxint` renvoie la case dans laquelle l'insertion a fini.

```

1 (* r_s : int vect -> unit = <fun> *)
2
3 let r_s perm =
4 let n= vect_length perm and maxint = (vect_length perm +1) in
5 let p = (init maxint) and q = (init maxint) in
6   for i=0 to (n-1) do
7     let (ins1, ins2) = insere perm.(i) p maxint in
8       q.(ins1).(ins2) <- (i+1)
9   done;
10 display p n maxint; display q n maxint;;

```

☞ `r_s perm` affiche le couple de tableaux de Young associés à la permutation `perm` en une complexité dans le pire des cas en $\mathcal{O}(n^2)$, où n est la longueur de `perm`.

```

1 (* r_s_total : int vect -> int vect vect * int vect vect = <fun> *)
2
3 let r_s_total perm =
4 let n= vect_length perm and maxint = (vect_length perm + 1) in
5 let p = (init maxint) and q = (init maxint) in
6   for i=0 to (n-1) do
7     let (ins1, ins2)= insere perm.(i) p maxint in
8       q.(ins1).(ins2) <- (i+1)
9   done;
10 (p,q);;

```

☞ `r_s_total perm` retourne le couple de matrices contenant les tableaux de Young associés à la permutation `perm` en une complexité dans le pire des cas en $\mathcal{O}(n^2)$, où n est la longueur de `perm`.

Par exemple, nous obtenons :

```

#r_s [|4;2;3;6;5;1;7|];;

1 3 5 7
2 6
4

1 3 4 7
2 5
6
- : unit = ()

```

et :

```
#r_s_total [|4;2;3;6;5;1;7|];; - : int vect vect * int vect vect =  
[| [|0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0|]; [|0; 1; 3; 5; 7; 8; 8; 8|];  
  [|0; 2; 6; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 4; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];  
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];  
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]|],  
[| [|0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0|]; [|0; 1; 3; 4; 7; 8; 8; 8|];  
  [|0; 2; 5; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 6; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];  
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];  
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]|]
```

12 Annexe D

Étant donnée une permutation `perm`, on se propose d'écrire un programme récursif qui retourne la longueur de sa plus longue sous-suite croissante ainsi que toutes les sous-suites croissantes de longueur maximale (ce que l'algorithme de Robinson-Schensted ne donne pas directement).

```
(* plus_longue : int vect -> int * (int list * int) list = <fun> *)

let plus_longue pi=
  let n = vect_length pi in

  let cherche_max i_max=
    (*cherche le plus grand élément M de pi*)
    let max = ref (0,0) and j = ref 0 in
    while !j<=i_max do
      if pi.(!j)> (fst !max) then max := (pi.(!j), !j);
      incr j;
    done;
    !max
  in

  let nb_zeros i_max =
    (*cherche le nombre de zéros dans pi avant l'indice i_max*)
    let z = ref 0 and k = ref 0 in
    while !k<=i_max do
      if pi.(!k)=0 then incr z;
      incr k;
    done;
    !z
  in

  let rec do_work i_max c = match (i_max,c) with
  |(-1,_) -> (0,[[[]],0])
  |(_,0) -> (0,[[[]],0])
  |_,1 -> let l = ref 0 in
    while pi.(!l)=0 do
      incr l;
    done;
    (1,[ ([pi.(!l)],!l) ])
  |_->
    let (max,p) = cherche_max i_max in
    pi.(p)<-0;

    (*On enlève de pi son plus grand élément (disons qu'il est en indice i)
    et on calcule la longueur de la plus longue sous-suite croissante:
    - d'une part pour la suite tronquée à l'indice i
    - d'autre part pour la suite en entier.
    Puis on distingue les cas...*)

    let (long1,list1) = do_work (p-1) (p- (nb_zeros (p-1))) in
    let (long2,list2) = do_work i_max (i_max + 1 - (nb_zeros i_max)) in
    pi.(p) <- max;
```

```

let rec map_aux1 max p= function
| []->[]
| couple :: q -> let liste = fst couple in
  (liste @ [max],p) :: (map_aux1 max p q)
in

let rec map_aux2 max p= function
| []->[]
| couple :: q -> let (liste, der) = couple and res = map_aux2 max p q in
  if der < p then
    (liste @ [max], p) :: res
  else
    res
in

if long1+1=long2 then (long2, (map_aux1 max p list1) @ list2)
else
  (let temp = map_aux2 max p list2 in
  if temp = [] then (long2,list2)
  else (long2+1, temp)
  )

in
do_work (n-1) n;;

```

➤ plus_longue pi retourne le couple (l, liste) , où l est la longueur de la plus longue sous-suite croissante de pi et liste est une liste contenant des couples de la forme (vect, k) , où vect est une sous-suite de longueur maximale se terminant à l'indice k. La complexité est en $\mathcal{O}(n^2)$.

Par exemple, on obtient :

```

#plus_longue [|10; 9; 5; 6; 8; 4; 2; 7; 1; 3|];;
#- : int * (int list * int) list = 3, [[5; 6; 8], 4; [5; 6; 7], 7]

```

En effet, pour la permutation π donnée en argument, $l_{10}(\pi) = 3$ et il y a deux sous-suites croissantes de longueur maximale : 5, 6, 8 qui se finit en indice 4 (le départ des indices étant à 0) et 5, 6, 7 qui se finit en indice 7.

Références

- [1] F. Ardila, Communication privée, Non publié.
- [2] R. P. Stanley, *Clay Research Academy Problems 2005*, Non publié.
- [3] I. Kortchemski, « Good Sequences, Bijections and Permutations », *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* **6** (2005). <http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/v6n2.php>
- [4] I. Kortchemski, « Bonnes suites et permutations », *Quadrature* **62** (2006), 24-34.
- [5] B. Le Floch, Communication privée, Non publié.
- [6] P. Erdős et G. Szekeres, « A combinatorial problem in geometry ». *Composito Math*, **2** (1935), 463-470.
- [7] J. M. Hammersley, « A few seedlings of research ». In *Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, 1970/1971), *Vol. 1 : Theory of statistics*. University California Press, Berkeley, CA, 1972, 345-394.
- [8] A. M. Vershik et S. V. Kerov. « Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables », *Soviet Math. Dokl.* **233** (1977), 527-531. Traduction de *Dokl. Acad. Nauk. SSSR* **233** (1977) 1024-1027.
- [9] B. F. Logan and L. A. Shepp, « A variational problem for random Young tableaux », *Adv. Math.* **26** (1977), 206-222.
- [10] J. Baik, P. Deift et K. Johansson, « On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations » *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 1119-1178.
- [11] C. E. Schensted, « Longest increasing and decreasing subsequences », *Canad. J. Math.* **13** (1961), 179-191.
- [12] B. Sagan, « The Symmetric Group », Seconde édition, Grad. Texts in Math. 203, Springer-Verlag, New York 2001.
- [13] S. Pilpel, « Descending subsequences of random permutations », *J. Combinatorial Th. A*, **53** (1990), 96-116.
- [14] C. A. Tracy, H. Widom, « Level-spacing distributions and the Airy kernel », *Comm. Math. Phys.* **159** (1994), 151-174.
- [15] A. Okounkov, « Random matrices and random permutations », *Internat. Math. Res. Notices* **2000** (2000), 1043-1095.
- [16] P. A. MacMahon, « The indices of permutations, and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects », *Amer. J. Math.* **35** (1913), 281-322.
- [17] D. Foata et M.-P. Schützenberger, « Major index and inversion number of permutations », *Math. Nach.* **83** (1978), 143-159.