RAPPORT DE TIPE

Représentations irréductibles du groupe symétrique et tableaux de Young

---

Igor Kortchemski

Juin 2006

Introduction

Dans ce rapport, notre principal centre d'interêt sera le tableau de Young, qui est grossièrement un tableau rempli d'entiers naturels. Notre but est de prouver la formule suivante :

$$\sum_{\lambda \vdash n} \left(f^\lambda\right)^2 = n!$$

où $\lambda \vdash n$ signifie que λ est une partition de n et f^λ désigne le nombre de tableaux de Young standards de forme λ. Nous donnons deux démonstrations de cette formule. La première est basée sur des éléments de la théorie de la représentation. Plus précisément, nous étudions les liens intimes entre tableaux de Young et représentations irréductibles du groupe symétrique. Les trois premières sections y sont consacrées. La seconde preuve est entièrement combinatoire et fait appel à un outil puissant et élégant en combinatoire, la preuve bijective. Nous y consacrons les deux dernières sections.

Dans la première section, nous présentons les bases de la théorie de la représentation linéaire des groupes finis. Nous définissons la notion de représentation, de G-module, de réductibilité et de G-homomorphisme. Ces notions seront nécessaires dans les deux sections suivantes.

Dans la deuxième section, nous montrons que toute représentation d'un groupe fini est décomposable en somme directe de représentations irréductibles (théorème de Maschke). Nous introduisons ensuite le caractère d'une représentation afin de montrer que si G est un groupe fini et $\left(V^{(i)}\right)$ une famille complète de représentations irréductibles deux à deux non équivalentes, alors $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$ et que le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G. La troisième section est indépendante de cette partie.

Dans la troisième section, nous déterminons toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Nous montrons que le nombre de partitions de n est égal au nombre de classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$. Nous associons ensuite à chaque partition une représentation irréductible S^λ de $\mathcal{S}_n$, appelée module de Specht. Nous montrons alors que la dimension de S^λ est f^λ. Le théorème cité dans le paragraphe précédent montre alors la formule annoncée en début d'introduction.

Dans la quatrième section, nous abandonons cette approche et construisons une bijection entre les couples de tableaux de Young standard de même forme et l'ensemble des permutations. Il s'agit de la correspondance de Robinson-Schensted. Un dénombrement de cardinal montre alors la formule annoncée en début d'introduction.

Dans la dernière section, nous implémentons l'algorithme de Robinson-Schensted sous Caml.

Table des matières

1 Représentations des groupes finis

La théorie de la représentation est un vaste domaine des mathématiques dont le but est d'étudier les groupes par le truchement d'applications linéaires d'espaces vectoriels. Cela permet notamment de se ramener à un problème d'algèbre linéaire, ce qui est souvent plus agréable que de travailler avec des groupes abstraits. Frobenius a fondé cette théorie en 1896 et Schur, étudiant de Frobenius, y a grandement contribué au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Cette théorie est maintenant devenue une notion incontournable dont les applications sont omniprésentes : en chimie cristallographique, en ingénierie et surtout en physique quantique : la théorie de la représentation permet d'analyser les symétries d'un problème physique en lien avec un groupe en classifiant les solutions de ce problème suivant les représentations irréductibles du groupe.

1.1 Rappels sur le groupe symétrique

Notre objet d'étude est le groupe symétrique, noté $\mathcal{S}_n$, qui est l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même, la loi interne étant la composition. $\mathcal{S}_n$ peut également être considéré comme l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Un élément $\pi \in \mathcal{S}_n$ sera représenté sous forme de tableau :

$$\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{array}.$$

La première ligne du tableau est parfois oubliée. On note alors $\pi = \pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)$. Cependant, nous utiliserons dans toute la suite de ce texte la représentation en cycles.

Définition 1.1.1. Soit $p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$. On appelle *p-cycle* de $\{1, 2, \ldots, n\}$ toute permutation π de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle qu'il existe $x_1, \ldots, x_p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deux à deux distincts, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(x_1) = x_2,\, \pi(x_2) = x_3,\, \ldots,\, \pi(x_{p-1}) = x_p,\, \pi(x_p) = x_1 \\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{x_1, \ldots, x_p\}, \pi(k) = k. \end{array} \right.$$

Une permutation π est appelée *cycle* si et seulement s'il existe $p \in \{2, \ldots, n\}$ tel que π soit un p-cycle. π est alors notée $\pi = (x_1, \ldots, x_p)$ et l'ensemble des x_i est appelé *support* de π. ■

Par exemple $\pi = 1, 5, 2, 4, 3$ est le 3-cycle $(2, 5, 3)$. On rappelle le théorème suivant :

Théorème 1.1.2. *Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est décomposable en produit de cycles à supports deux à deux disjoints, de façon unique à l'ordre près des cycles.*

D'un point de vue pratique, pour écrire la décomposition en cycles d'une permutation π, la procédure à suivre est la suivante : on cherche le plus petit entier p tel que $1 = \pi^p(1)$. On a alors trouvé un cycle qui intervient dans la décomposition en produit de cycles de π ; c'est le cycle $(1, \pi(1), \ldots, \pi^{p-1}(1))$. On recommence le procédé avec un élément qui n'est pas encore apparu dans la décomposition. Par exemple la décomposition en produit de cycles de $\pi = 2, 3, 1, 4, 5$ est $(1, 2, 3)(4)(5)$ ou plus simplement $(1, 2, 3)$.

Il est connu que l'ensemble des transpositions, c'est-à-dire l'ensemble des 2-cycles, engendre $\mathcal{S}_n$.

Définition 1.1.3. Soit $\pi \in \mathcal{S}_n$. Si π s'écrit sous la forme $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$, où les τ_i sont des transpositions, on définit la signature de π, notée $\operatorname{sgn}(\pi)$, par l'entier $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^k$. ■

On prouve que sgn est bien définie, à savoir que sgn est indépendante de la décomposition de π en transpositions. Il est alors facile de voir que sgn est un homomorphisme de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$. En particulier :

Proposition 1.1.4. *Pour tous $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$:*

$$\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma).$$

1.2 Représentations matricielles

Pour simplifier les choses et ne pas nous lancer dans des complications qui n'ont pas lieu d'être ici, nous considérons tous les espaces vectoriels comme des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et tous les groupes comme des groupes finis.

Commençons par quelques rappels et notations. $GL_d(\mathbb{C})$, ou GL_d, est le groupe des matrices inversibles $d \times d$ pour la multiplication matricielle, appelé groupe linéaire. La matrice identité de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sera notée I_d et l'élément neutre d'un groupe sera noté ϵ.

Définition 1.2.1. Une *représentation matricielle* d'un groupe G est un homomorphisme de groupes :

$$X : G \to GL_d.$$

De manière équivalente, se donner une représentation matricielle d'un groupe G, c'est associer à chaque élément $g \in G$ une matrice $X(g) \in M_d(\mathbb{C})$ de sorte que :

1. $X(\epsilon) = I_d$,
2. Pour tous $g, h \in G$, $X(gh) = X(g)X(h)$.

L'entier d, noté $\deg X$, est appelé *degré* ou *dimension* de la représentation. ■

Remarquons que dans ce dernier cas $X(g)$ appartient bien à GL_d, car d'après les deux conditions, $X(g^{-1}) = X(g)^{-1} \in GL_d$.

Nous pouvons d'ores et déjà présenter quelques représentations de degré 1.

Exemple 1.2.2. Tout groupe admet une représentation triviale : c'est celle qui envoie tout élément $g \in G$ sur la matrice (1). Elle vérifie en effet $X(\epsilon) = 1$ et pour tous $g, h \in G$, $X(g)X(h) = (1)(1) = (1) = X(gh)$. ■

Exemple 1.2.3. Trouvons maintenant toutes les représentations de degré 1 du groupe cyclique d'ordre n, noté C_n. Soit g un générateur de C_n. Posons $X(g) = c$ avec $c \in \mathbb{C}$. Alors

$$(c^n) = X(g^n) = X(\epsilon) = (1).$$

Donc c est une racine n-ième de l'unité. Par conséquent, il existe n représentations de C_n de degré 1. Par exemple pour $n = 4$, il y a 4 racines de l'unité qui sont $1, i, -1, i$. Notons $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}$ les 4 représentations correspondantes. On construit alors le tableau suivant :

	ϵ	g	g^2	g^3
$X^{(1)}$	(1)	(1)	(1)	(1)
$X^{(2)}$	(1)	(i)	(-1)	$(-i)$
$X^{(3)}$	(1)	(-1)	(1)	(-1)
$X^{(4)}$	(1)	$(-i)$	(-1)	(i)

où l'élément en ligne i et en colonne j est $X^{(i)}(g^j)$.

Cependant toutes les représentations de C_n ne sont pas nécésairement de degré 1. Par exemple, on peut vérifier que :

$$X(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

définit une représentation de C_4. ■

Exemple 1.2.4. D'après la proposition 1.1.4, en posant $X(\pi) = (\mathrm{sgn}(\pi))$ l'on définit une représentation de $\mathcal{S}_n$ de degré 1 que l'on appelle *représentation par signature.* ■

Exemple 1.2.5. Exhibons une représentation de $\mathcal{S}_n$ de degré n. Soit $\pi \in \mathcal{S}_n$. On pose $X(\pi) = (x_{i,j})_{n\times n}$, où

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(j) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On l'appelle *représentation par permutation.* La matrice $X(\pi)$ est appelée *matrice de permutation* de π. On vérifie facilement que c'est bien une représentation.

Par exemple, les matrices de la représentation par permutation de S_3 s'écrivent :

$$X(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X((1,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X((1,3,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les permutations ont été écrites sous leur représentation en cycles. ■

1.3 G-modules et algèbre de groupe

En dimension finie, un endomorphisme est grossièrement une matrice. On peut donc traduire les représentations matricielles en terme d'espaces vectoriels. Plus précisément, V étant un espace vectoriel, notons $GL(V)$ le groupe linéaire de V, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires, ou endomorphismes, sur V. Si $\dim V = d$, il est bien connu que $GL(V)$ et GL_d sont isomorphes en tant que groupes.

Dans toute la suite de ce texte, tout élément considéré comme vecteur d'un espace vectoriel sera mis en gras pour faciliter la lecture.

Définition 1.3.1. Soit V un espace vectoriel et G un groupe. V est un *G-module* s'il existe un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to GL(V).$$

De manière équivalente, se donner un G-module, c'est se donner une multiplication des éléments de V par les éléments de G. En notant $g\mathbf{v}$ le produit de g par $\mathbf{v}$, cette multiplication doit vérifier les 4 points suivants, pour tous $g, h \in G$; $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ et $c, d \in C$:

1. $g\mathbf{v} \in V$,
2. $g(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c(g\mathbf{v}) + d(g\mathbf{w})$,
3. $(gh)\mathbf{v} = g(h\mathbf{v})$,
4. $\epsilon\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

■

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on appellera un G-module simplement un module.

Il est impératif de comprendre que la notation $g\mathbf{v}$ représente l'image de $\mathbf{v}$ par l'endomorphisme $\rho(g)$. Autrement dit, nous identifions l'élement g avec l'endomorphisme $\rho(g)$. Comme nous le verrons par la suite, cet abus permet de rendre les preuves plus propres.

Il est également fondamental de voir qu'un G-module est intimement lié à une représentation matricielle. En effet, donnons-nous une représentation matricielle X de degré d. Soit V l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$. Le fait que X soit une représentation permet de définir une multiplication sur V : si $\mathbf{v} \in V$ et $g \in G$, on pose

$$g\mathbf{v} \overset{\text{déf}}{=} X(g)\mathbf{v},$$

l'opération de droite étant la multiplication matricielle. Puisque X est une représentation, les critères de la définition 1.3.1 sont vérifiés.

Réciproquement, si V est G-module, choisissons n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de V. On définit $X(g)$ comme étant la matrice de l'endomorphisme g exprimé dans la base $\mathcal{B}$. Puisqu'il existe une multiplication des éléments de V par ceux de g, les critères de la définition 1.2.1 sont vérifiés.

Cela nous permettra par la suite de confondre G-module et représentation.

Si S est un ensemble possédant une multiplication par les éléments de G qui satisfasse seulement les points $1, 3, 4$ de la proposition 1.3.1, on dit que G *agit* sur S.

Exemple 1.3.2. Soit $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. $\mathcal{S}_n$ agit alors naturellement sur S par l'action $\pi s = \pi(s)$ pour tous $\pi \in \mathcal{S}_n$ et $s \in S$. Cette action nous permet de créer un $\mathcal{S}_n$-module en posant :

$$\mathbb{C}\mathbf{S} = \{c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + \cdots + c_n\mathbf{n} \quad | \quad \text{pour tout } i, c_i \in \mathbb{C}\}$$

muni de l'action

$$\pi(c_1\mathbf{1} + c_2\mathbf{2} + \cdots + c_n\mathbf{n}) = c_1\pi(\mathbf{1}) + c_2\pi(\mathbf{2}) + \cdots + c_n\pi(\mathbf{n}).$$

D'après ce que nous avons dit précédemment, nous pouvons chercher à déterminer les matrices $X(\pi)$ correspondantes. Plaçons-nous par exemple sur $\mathcal{S}_3$ et munissons $\mathbb{C}\mathbf{S}$ de la base canonique $\mathcal{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$. Calculons $X((1,2))$. Par définition, $X((1,2))$ est la matrice de l'endomorphisme $(1,2)$ dans la base $\mathcal{B}$. On calcule donc l'image des éléments de $\mathcal{B}$ par $(1,2)$:

$$(1,2)\mathbf{1} = \mathbf{2}; \qquad (1,2)\mathbf{2} = \mathbf{1}; \qquad (1,2)\mathbf{3} = \mathbf{3},$$

de sorte que

$$X((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'il s'agit de la matrice de la représentation par permutation de $(1,2)$ dans l'exemple 1.2.5.

Plus généralement, soit $X(\pi) = (x_{i,j})_{n\times n}$. Alors, par définition, $x_{i,j} = 1$ si, et seulement si, $\pi\mathbf{j} = \mathbf{i}$ ce qui est équivalent à $\pi(j) = i$. Nous avons donc reconstruit la représentation par permutation en utilisant les modules. ■

Nous présentons maintenant une représentation des plus importantes d'un groupe, la représentation régulière. Grâce à celle-ci, nous réussirons en effet à déterminer le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini.

Exemple 1.3.3. Soit G un groupe. L'idée est d'exploiter l'action de G sur lui-même : pour tous $g, h \in G$, on définit l'action de g sur h par gh, la loi de multiplication étant la loi de groupe. Les points $1, 3, 4$ de la définition 1.3.1 sont garantis respectivement par le fait que la loi soit interne, par l'associativité et par les propriétés de l'élément neutre.

Soient $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les éléments de G. Comme dans l'exemple 1.3.2,

$$\mathbb{C}[\mathbf{G}] = \{c_1\mathbf{g_1} + c_2\mathbf{g_2} + \cdots + c_n\mathbf{g_n} \quad | \quad \text{pour tout } i, c_i \in \mathbb{C}\}$$

est un G-module appelé *groupe d'algèbre de G*. Ce G-module définit la *représentation régulière* de G. Des crochets ont été utilisés car $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$ est muni d'une structure d'algèbre en plus d'une structure d'espace vectoriel.

Comment définir une action sur $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$? Si $g_ig_j = g_k$ dans G, alors on pose naturellement $\mathbf{g_i}\mathbf{g_j} = \mathbf{g_k}$ dans $\mathbb{C}[\mathbf{G}]$. En somme, pour tout $g \in G$:

$$g(c_1\mathbf{g_1} + c_2\mathbf{g_2} + \cdots + c_n\mathbf{g_n}) = c_1(\mathbf{gg_1}) + c_2(\mathbf{gg_2}) + \cdots + (c_n\mathbf{gg_n}).$$

Regardons de plus près la représentation régulière du groupe cyclique C_4. Alors :

$$\mathbb{C}[\mathbf{C_4}] = \{c_1\boldsymbol{\epsilon} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{g^2} + c_4\mathbf{g^3} \quad | \quad \text{pour tout } i, c_i \in \mathbb{C}\}.$$

À titre d'exemple, calculons $X(g^2)$, exprimée dans la base canonique. Vu que

$$g^2\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{g^2}; \qquad g^2\mathbf{g} = \mathbf{g^3}; \qquad g^2\mathbf{g^2} = \boldsymbol{\epsilon}; \qquad g^2\mathbf{g^3} = \mathbf{g},$$

cela entraîne que

$$X(g^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant de même, on vérifiera que

$$X(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(g^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

1.4 Réductibilité

Pour étudier de manière plus approfondie les représentations, il est indispensable de trouver les « briques de base » à partir desquelles les représentations sont construites. Ces briques vont constituer les représentations irréductibles.

Définition 1.4.1. Soit V un G-module. Un *sous-module de V* est un sous-espace vectoriel W de E stable par l'action de G. Autrement dit,

$$\mathbf{w} \in W \Rightarrow \forall g \in G, \quad g\mathbf{w} \in W.$$

On dit alors que W *est stable par* G. ■

Exemple 1.4.2. Tout G-module V admet V et $\{\mathbf{0}\}$ comme sous-modules, appelés *triviaux*. Tout autre sous-module de V est *non trivial*.

Exemple 1.4.3. Trouvons un sous-module de l'algèbre de groupe. À cet effet, considérons le sous-espace vectoriel W de V de dimension 1 engendré par le vecteur qui est la somme des éléments de G, autrement dit

$$W = \mathbb{C}[\boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2} + \cdots + \boldsymbol{g_n}].$$

Vérifions que W est un sous-module de V. Soit $g \in G$. Alors

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2} + \cdots + \boldsymbol{g_n}) &= g\boldsymbol{g_1} + g\boldsymbol{g_2} + \cdots + g\boldsymbol{g_n} \\ &= \boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2} + \cdots + \boldsymbol{g_n} \in W \end{aligned}$$

Comme tout élément $g \in G$ laisse W invariant, nous dirons de plus que G *agit trivialement sur* W. ■

Exemple 1.4.4. Plaçons-nous dans le cas $G = S_n$ et examinons le sous-module

$$W = \mathbb{C}[\textstyle\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi)\boldsymbol{\pi}].$$

Nous avons déjà rencontré cette représentation : il s'agit de la représentation par permutation. En effet, soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et calculons $X(\sigma)$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \sigma\left(\textstyle\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi)\boldsymbol{\pi}\right) &= \textstyle\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi)\sigma\boldsymbol{\pi} \\ &= \textstyle\sum_{\pi' \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\pi')\boldsymbol{\pi'} && \text{en posant } \pi' = \sigma\pi \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\textstyle\sum_{\pi' \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi)\boldsymbol{\pi'}\right) && \text{en utilisant } \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

En définitive, $X(\sigma) = (\operatorname{sgn}(\sigma))$, ce qui démontre notre assertion. ■

Définition 1.4.5. Un G-module V est dit *réductible* s'il existe un sous-module non trivial W de V. Dans le cas contraire, V est dit *irréductible.* De manière équivalente, V est réductible s'il existe une base B dans laquelle pour tout $g \in G$, les matrices $X(g)$ sont de la forme :

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array}\right)$$

où $A(g)$ est une matrice carrée de taille fixé et 0 une matrice non vide ne contenant que des 0. ■

L'équivalence se voit immédiatement en considérant une base de W et en la complétant en une base de V.

1.5 Réductibilité complète

La réductibilité des représentations correspond en quelque sorte à la notion de réduction des matrices. Nous chercherons en effet à écrire les matrices d'une représentation sous la forme d'une matrice diagonale par blocs :

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & B(g) \end{array}\right).$$

Définition 1.5.1. Soit V est un G-module et U, W deux sous-modules de V. U et W *sont en somme directe* si U et W sont en somme directe en tant qu'espaces vectoriels. On dit alors que U et W sont *supplémentaires.*

Si A et B sont deux matrices, la matrice X définie par :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

est appelée *somme directe de A et de B*. On note $X = A \oplus B$. ■

Pour voir le lien entre ces deux définitions, il suffit de choisir une base de U puis de W, et de les réunir en une base de V. Il s'ensuit que, dans cette base, $X(g)$ est de la forme

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & B(g) \end{array}\right).$$

Tout au long de ce texte, notre but sera de trouver des sous-modules de V. Pour y parvenir, il peut être judicieux de considérer un produit scalaire.

Définition 1.5.2. Soit V un G-module muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que ce produit scalaire est *invariant sous l'action de* G si pour tous $g \in G$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$:

$$\langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

■

Proposition 1.5.3. *Soit V un G-module, W un sous-module de V et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire invariant sous l'action de G. Alors $W^\perp$ est un G-module.*

Preuve. Soient $g \in G$, $\boldsymbol{u} \in W^\perp$ et montrons que $g\boldsymbol{u} \in W^\perp$. Pour tout $w \in W$, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \langle g\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle & = & \langle g^{-1}g\boldsymbol{u}, g^{-1}\boldsymbol{w} \rangle & \text{car } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est invariant} \\ & = & \langle \boldsymbol{u}, g^{-1}\boldsymbol{w} \rangle & \\ & = & 0 & \text{puisque } \boldsymbol{u} \in W^\perp \text{ et } g^{-1}\boldsymbol{w} \in W. \end{array}$$

$W^\perp$ est donc un G-module. ■

Le théorème qui suit est un résultat important en théorie de la représentation.

Théorème 1.5.4 (Théorème de Maschke)**.** *Soit G un groupe fini et V un G-module non nul. Alors il existe une décomposition de V sous la forme*

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \cdots \oplus W^{(1)},$$

où chaque $W^{(i)}$ est un sous-module irréductible de V.

Preuve. Procédons par récurrence sur $d = \dim V$. Si $d = 1$, le théorème est vérifié étant donné que toutes les représentations de degré 1 sont irréductibles. Supposons donc $d > 1$ ainsi que V réductible. Par définition, V possède un sous-module W. L'idée est de trouver un supplémentaire de W stable par G en introduisant un produit scalaire invariant sous l'action de G.

Pour ce faire, choisissons $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_d}\}$ une base de V et considérons le produit scalaire vérifiant

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \delta_{i,j}.$$

Rappelons que par définition, $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et vaut 0 sinon. Posons ensuite, pour tous $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle' = \sum_{g \in G} \langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{w} \rangle.$$

C'est clairement un produit scalaire. Vérifions qu'il est invariant sous l'action de G. Soient $h \in G$ et $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$. Alors

$$\begin{aligned}\langle h\boldsymbol{v}, h\boldsymbol{w}\rangle' &= \sum_{g\in G}\langle gh\boldsymbol{v}, gh\boldsymbol{w}\rangle\\ &= \sum_{f\in G}\langle f\boldsymbol{v}, f\boldsymbol{w}\rangle\\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle',\end{aligned}$$

de sorte que $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ est bien invariant sous l'action de G.

D'après la proposition 1.5.3, $W^\perp$ est un sous-module. En remarquant que

$$V = W \oplus W^\perp,$$

nous pouvons utiliser notre hypothèse de récurrence sur W et $W^\perp$, puis conclure. ■

La version matricielle du théorème de Maschke est alors :

Corollaire 1.5.5. *Soit G un groupe fini et X une représentation matricielle de G de dimension $d > 0$. Alors il existe une matrice T telle que pour tout $g \in G$,*

$$TX(g)T^{-1} = \begin{pmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X^{(2)}(g) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & X^{(k)}(g)\end{pmatrix}$$

où $X^{(i)}$ est une représentation matricielle irréductible de G.

Preuve. Considérons $V = \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ muni de l'action $g\boldsymbol{v} = X(g)\boldsymbol{v}$. D'après le théorème de Maschke :

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \cdots \oplus W^{(1)},$$

où chaque $W^{(i)}$ est irréductible de dimension d_i. Soient $\mathcal{B}_C$ la base canonique de V et $\mathcal{B}$ la base de V dont les d_1 premiers vecteurs forment une base de $W^{(1)}$, les d_2 vecteurs suivants forment une base de $W^{(2)}$, et ainsi de suite. Il suffit alors de poser $T = \mathrm{Pass}(B_c, B)$. ■

1.6 G-homomorphismes et lemme de Schur

La notion de G-homomorphisme va apporter une réponse à la question de savoir si deux représentations sont isomorphes ou non.

Définition 1.6.1. Soient V et W deux G-modules. Un *G-homomorphisme*, ou simplement *homomorphisme*, est une application $\mathbb{C}$-linéaire $\theta : V \to W$ vérifiant pour tous $g \in G$ et $\boldsymbol{v} \in V$:

$$\theta(g\boldsymbol{v}) = g\theta(\boldsymbol{v}).$$

On dit que θ *commute à l'action de G* ou encore que θ est *G-équivariant.* ■

D'un point de vue matriciel, considérons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases respectives de V et W. Soient X et Y les représentations matricielles respectives de V et W. Soit finalement $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\theta)$. D'où, pour tout $g \in G$ et tout vecteur colonne $\boldsymbol{v}$,

$$TX(g)\boldsymbol{v} = Y(g)T\boldsymbol{v}.$$

Par conséquent, pour tout $g \in G$,

$$TX(g) = Y(g)T. \tag{1.1}$$

Définition 1.6.2. Soient V et W deux G-modules. Un G-homomorphisme $\theta : V \to W$ est un *G-isomorphisme* si θ est bijectif. On dit alors que V et W sont *G-isomorphes* ou *G-équivalents.* ■

Cela signifie que la matrice T associée est inversible. L'équation (1.1) devient alors

$$Y(g) = TX(g)T^{-1}$$

pour tout $g \in G$. Par analogie avec les matrices, c'est en quelque sorte un « changement de base de la représentation ».

Il se trouve que le noyau et l'image d'un G-homomorphisme possèdent une structure de G-module.

Proposition 1.6.3. *Soit $\theta : V \to W$ un G-homomorphisme. Alors*

1. $\ker\theta$ *est un sous-module de* V*,*

2. $\operatorname{im}\theta$ *est un sous-module de* W*.*

Preuve. C'est immédiat. Montrons malgré tout le premier point. Il est connu que $\ker\theta$ est un sous-espace vectoriel de V. Il suffit donc de montrer qu'il est stable par l'action de G. Soit $\boldsymbol{v} \in \ker\theta$ fixé. Alors pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \theta(g\boldsymbol{v}) &= g\theta(\boldsymbol{v}) \\ &= g\mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Cette proposition permet de montrer facilement le lemme de Schur, résultat très souvent utile.

Théorème 1.6.4 (Lemme de Schur)**.** *Soient V et W deux G-modules irréductibles. Si $\theta : V \to W$ est un G-homomorphisme, alors soit*

1. *θ est un G-isomorphisme,*

2. *Soit θ est l'application nulle.*

Preuve. Étant donné que V est irréductible et que $\ker\theta$ est un sous-module de V, soit $\ker\theta = \{\mathbf{0}\}$, soit $\ker\theta = V$. De même, soit $\operatorname{im}\theta = \{\mathbf{0}\}$, soit $\operatorname{im}\theta = W$. Mais l'un des deux cas $\ker\theta = V$ ou $\operatorname{im}\theta = \{\mathbf{0}\}$ implique que θ est la fonction nulle. Par suite, si θ n'est pas la fonction nulle, c'est que θ est un G-isomorphisme. ■

La traduction matricielle fournit :

Corollaire 1.6.5. *Soient X et Y deux représentations matricielles irréductibles. Si T est une matrice vérifiant pour tout $g \in G$, $TX(g) = Y(g)T$ alors soit*

1. *T est inversible,*

2. *Soit T est la matrice nulle.*

En notant $\operatorname{Hom}_G(V, W)$ l'ensemble des G-homomorphismes de V sur W, le lemme de Schur est parfois présenté sous la manière suivante :

Corollaire 1.6.6. *Soient V et W deux G-modules, V étant irréductible. Alors* $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$ *si, et seulement si, W ne contient aucun sous-module isomorphe à V.*

Si le corps des scalaires est $\mathbb{C}$, nous pouvons dire une chose supplémentaire. En effet, soit T une matrice vérifiant pour tout $g \in G$, $TX(g) = X(g)T$. Soit $c \in \mathbb{C}$. Alors

$$(T - cI)X = X(T - cI),$$

I étant la matrice identité de dimension convenable. Puisque $\mathbb{C}$ a le bon goût d'être algébriquement clos, choisissons une valeur propre de $T - cI$ pour c. Cette dernière matrice n'est donc pas inversible. Le corollaire 1.6.5 montre que $T - cI = 0$. En conclusion :

Corollaire 1.6.7. *Soit X une représentation matricielle irréductible de G sur $\mathbb{C}$ de degré d. Alors les matrices qui commutent avec $X(g)$ pour tout $g \in G$ sont exactement celles de la forme cI_d, $c \in \mathbb{C}$.*

2 Représentations irréductibles

Dans cette section, nous prouvons que le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini est égal au nombre de classes de conjugaisons de ce groupe. Pour cela, nous développons deux outils : le commutant du centre d'une représentation et le caractère d'une représentation. Notre dessein peut être atteint par un point de vue matriciel ou par l'intermédiaire de modules. Nous choisissons la première approche, qui est plus longue, mais qui présente l'interêt d'introduire le produit tensoriel et de rester moins abstraite.

2.1 Commutant du centre d'une représentation

Nous détérminons ici le commutant du centre d'une représentation, et plus particulièrement sa dimension.

Définition 2.1.1. Soit $X : G \to GL_d$ une représentation matricielle. *Le commutant de* X est l'algèbre

$$\operatorname{Com} X = \{T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \quad | \quad TX(g) = X(g)T \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Soit V un G-module. *L'algèbre d'endomorphismes de* V est l'algèbre

$$\operatorname{End} V = \{\theta : V \to V \quad | \quad \theta \text{ est un } G\text{-homomorphisme}\} = \operatorname{Hom}_G(V, V).$$

■

Il est clair que $\operatorname{Com} X$ et $\operatorname{End} V$ sont des algèbres. D'autre part, si V est un G-module et si X est la représentation matricielle correspondante, alors $\operatorname{End} V$ et $\operatorname{Com} X$ sont isomorphes en tant qu'algèbres. En effet, soit $\mathcal{B}$ la base de V qui a servi à construire X. Il suffit alors de considérer l'isomorphisme de $\operatorname{End} V$ sur $\operatorname{Com} X$ qui envoie $\theta \in \operatorname{End} V$ sur $T = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\theta)$, qui appartient à $\operatorname{Com} X$ d'après l'équation (1.1).

Notre but est de calculer $\operatorname{Com} X$ pour toute représentation X.

Proposition 2.1.2. *Soit X une représentation matricielle vérifiant*

$$X = X^{(1)} \oplus X^{(2)} \oplus \cdots \oplus X^{(k)},$$

où les $X^{(i)}$ sont irréductibles de degré d_i et non équivalents deux à deux. Alors :

$$\operatorname{Com} X = \{\oplus_{i=1}^{k} c_i I_{d_i}, \quad c_i \in \mathbb{C}\}.$$

Preuve. Soient X et $T \in \operatorname{Com} X$ les matrices par blocs :

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X^{(k)} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \cdots & T_{1,k} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{k,1} & T_{k,2} & \cdots & T_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice par blocs, on note $[A]_{i,j}$ le bloc de A en i-ème ligne et j-ième colonne. Alors $[XT]_{i,j} = X^{(i)}T_{i,j}$ et $[TX]_{i,j} = T_{i,j}X^{(j)}$. Par conséquent, pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$X^{(i)}T_{i,j} = T_{i,j}X^{(j)}.$$

Les corollaires 1.6.5 et 1.6.7 montrent alors que :

$$T_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ c_i I_{d_i}, c_i \in \mathbb{C} & \text{si } i = j, \end{cases}$$

d'où le résultat. ■

Définition 2.1.3. Soit X' une représentation matricielle qui est la somme directe de m représentations irréductibles identiques X. On note alors

$$X' = mX = \overbrace{X \oplus X \oplus \cdots X}^{m}.$$

L'entier positif m est appelé *multiplicité de X dans X'*. ■

Proposition 2.1.4. *Soit X une représentation matricielle vérifiant :*

$$X = mX^{(1)}$$

où $X^{(1)}$ est irréductible de degré d. Alors :

$$\operatorname{Com} X = \left\{ \begin{pmatrix} c_{1,1}I_d & c_{1,2}I_d & \cdots & c_{1,d}I_d \\ c_{2,1}I_d & c_{2,2}I_d & \cdots & c_{2,d}I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d,1}I_d & c_{d,2}I_d & \cdots & c_{d,d}I_d \end{pmatrix}, \quad c_{i,j} \in \mathbb{C} \right\}$$

Preuve. En consérvant la démarche et les notations de la preuve de la proposition 2.1.2, nous obtenons cette fois-ci que $T_{i,j} = c_{i,j}I_d$, $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour tous i, j. Le résultat en découle. ■

Le produit tensoriel nous aménera à écrire la matrice précédente sous une forme plus agréable.

Définition 2.1.5. Soient $X = (x_{i,j})_{m\times m}$ et $Y_{n\times n}$ deux matrices. On définit leur *produit tensoriel* par la matrice par blocs suivante :

$$X \otimes Y = (x_{i,j}Y) = \begin{pmatrix} x_{1,1}Y & x_{1,2}Y & \cdots \\ x_{2,1}Y & x_{2,2}Y & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

■

Ainsi, si $X = mX^{(1)}$ avec $X^{(1)}$ irréductible de degré d, alors :

$$\operatorname{Com} X = \{M_m \otimes I_d \quad | \quad M_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})\}.$$

En définitive, les propositions 2.1.2 et 2.1.4 impliquent la proposition suivante.

Proposition 2.1.6. *Soit X une représentation matricielle qui se décompose sous la forme :*

$$X = m_1X^{(1)} \oplus m_2X^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_kX^{(k)},$$

où les $X^{(i)}$ sont irréductibles de degré d_i non équivalents deux à deux. Alors :

$$\operatorname{Com} X = \{\oplus_{i=1}^{k} (M_{m_i} \otimes I_{d_i}), \quad M_{m_i} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})\}.$$

Nous aurons également besoin d'une dernière propriété des sommes directes et du produit tensoriel.

Proposition 2.1.7. *Soient $A, X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $B, Y \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Alors*

1. $(A \oplus B)(X \oplus Y) = AX \oplus BY$,
2. $(A \otimes B)(X \otimes Y) = AX \otimes BY$.

Preuve. 1. Il suffit de remarquer que

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

2. Supposons $A = (a_{i,j})$ et $X = (x_{i,j})$. Alors les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{rcll} (A \otimes B)(X \otimes Y) & = & (a_{i,j}B)(x_{i,j}Y) & \text{par définition de } \otimes \\ & = & (\sum_k a_{i,k}Bx_{k,j}Y) & \text{par multiplication par blocs} \\ & = & ((\sum_k a_{i,k}x_{k,j})BY & \text{par distibutivité} \\ & = & AX \otimes BY & \text{par définition de } \otimes . \end{array}$$

■

Il ne reste plus qu'à définir ce qu'est le centre d'une algèbre.

Définition 2.1.8. Le *centre* d'une algèbre A est l'ensemble des éléments qui commutent avec tout élément de A :

$$Z_A = \{a \in A \quad | \quad ab = ba \text{ pour tout } b \in A\}.$$

■

Le centre de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est bien connu.

Proposition 2.1.9. *Le centre de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ *est :*

$$Z_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})} = \{cI_d, c \in \mathbb{C}\}.$$

Preuve. Cela est facile, il suffit de choisir des matrices élémentaires pour conclure. ■

Nous pouvons enfin déterminer $Z_{\operatorname{Com} X}$. Soit $C \in Z_{\operatorname{Com} X}$, X et $\operatorname{Com} X$ étant définis comme dans la proposition 2.1.6. Par définition,

$$\text{pour tout } T \in \operatorname{Com} X, \quad CT = TC. \tag{2.1}$$

D'après la proposition 2.1.6, nous pouvons écrire T et C sous la forme :

$$T = \oplus_{i=1}^k (M_{m_i} \otimes I_{d_i}) \quad \text{et} \quad C = \oplus_{i=1}^k (C_{m_i} \otimes I_{d_i}).$$

Calculons ensuite CT et TC :

$$\begin{array}{rcll} CT & = & (\oplus_{i=1}^k C_{m_i} \otimes I_{d_i})(\oplus_{i=1}^k M_{m_i} \otimes I_{d_i}) & \text{(par définition)} \\ & = & \oplus_{i=1}^k (C_{m_i} \otimes I_{d_i})(M_{m_i} \otimes I_{d_i}) & \text{(proposition 2.1.7, point 1)} \\ & = & \oplus_{i=1}^k (C_{m_i} M_{m_i} \otimes I_{d_i}) & \text{(proposition 2.1.7, point 2).} \end{array}$$

De même,

$$TC = \oplus_{i=1}^k (M_{m_i} C_{m_i} \otimes I_{d_i}).$$

Par conséquent, l'équation (2.1) est vérifiée si, et seulement si :

$$C_{m_i} M_{m_i} = M_{m_i} C_{m_i} \text{ pour tous } M_{m_i} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}).$$

Il s'ensuit que C_{m_i} appartient au centre de $\mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$. D'après la proposition 2.1.9, pour tout i,

$$C_{m_i} = c_i I_{m_i}$$

avec $c_i \in \mathbb{C}$. En conclusion,

$$\begin{aligned} C &= \oplus_{i=1}^{k} c_i I_{m_i} \otimes I_{d_i} \\ &= \oplus_{i=1}^{k} c_i I_{m_i d_i}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\dim Z_{\operatorname{Com} X} = k$. Résumons notre étude :

Théorème 2.1.10. *Soit X une représentation matricielle qui se décompose sous la forme :*

$$X = m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_k X^{(k)},$$

où les $X^{(i)}$ sont irréductibles de degré d_i non équivalents deux à deux. Alors :

1. $\deg X = \sum_{i=1}^{k} \deg(m_i X^{(i)}) = m_1 d_1 + m_2 d_2 + \cdots m_k d_k$,
2. $\operatorname{Com} X = \{\oplus_{i=1}^{k} (M_{m_i} \otimes I_{d_i}), \quad M_{m_i} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$ *pour tout* $i\}$,
3. $\dim(\operatorname{Com} X) = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$,
4. $Z_{\operatorname{Com} X} = \{\oplus_{i=1}^{k} c_i I_{m_i d_i} \quad | \quad c_i \in \mathbb{C}$ *pour tout* $i\}$,
5. *Et* $\dim Z_{\operatorname{Com} X} = k$.

Cependant, toute représentation matricielle n'est pas forcément décomposable en irréductibles : il faut parfois effectuer un changement de base. Le théorème précédent n'est pas alors directement applicable, une étape supplémentaire est nécéssaire.

En effet, soit Y une représentation matricielle. D'après le corollaire 1.5.5, il existe une matrice R vérifiant $Y = RXR^{-1}$, X étant décomposable en irréductibles, c'est-à-dire de la forme présentée dans le théorème précédent. Il suffit alors de remarquer que l'application :

$$T \to RTR^{-1}$$

est un isomorphisme d'algèbres entre $\operatorname{Com} X$ et $\operatorname{Com} Y$, puis entre $Z_{\operatorname{Com} X}$ et $Z_{\operatorname{Com} Y}$. Le théorème 2.1.10 est donc vrai en replaçant les égalités qui ont lieu entre des ensembles par des isomorphismes.

La traduction en termes de modules de ce théorème est alors :

Théorème 2.1.11. *Soit V un G-module qui se décompose sous la forme*

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus m_2 V^{(2)} \oplus \cdots m_k V^{(k)},$$

où les $V^{(i)}$ sont des irréductibles de dimension d_i non équivalents deux à deux. Alors :

1. $\dim V = m_1 d_1 + m_2 d_2 + \cdots m_k d_k$,
2. $\operatorname{End} V \cong \oplus_{i=1}^{k} \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$,
3. $\dim(\operatorname{End} V) = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$,
4. $Z_{\operatorname{End} V}$ *est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales de taille* k,
5. *Et* $\dim Z_{\operatorname{End} V} = k$.

2.2 Caractères

Un autre outil important en théorie de la représentation est le caractère d'une représentation. Les caractères jouent un rôle fondamental dans la classification des groupes simples et permettent de mieux étudier les représentations d'un groupe et leurs décompositions en représentations irréductibles.

Définition 2.2.1. Soit X une représentation matricielle. Le *caractère de* X est une application de G dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\chi(g) = \operatorname{tr} X(g).$$

Le *caractère* d'un G-module V est la trace de la représentation matricielle associée. Un caractère est dit *irréductible* si la représentation associée est irréductible. ■

Remarquons que la définition précédente a bien un sens puisque le caractère d'un G-module est bien défini. En effet, soient X et Y deux représentations associées à un G-module V. Alors il existe T telle que $Y = TXT^{-1}$ de sorte que $\operatorname{tr} Y(g) = \operatorname{tr} TX(g)T^{-1} = \operatorname{tr} TT^{-1}X(g) = \operatorname{tr} X(g)$.

Exemple 2.2.2. Soit X la représentation par permutation de S_n, présentée en exemple 1.2.5 et χ le caractère associé. Alors :

$$\begin{aligned} \chi(\pi) &= \text{le nombre de un sur la diagonale de } X(\pi) \\ &= \text{le nombre de points fixes de } \pi \end{aligned}$$

■

Exemple 2.2.3. Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ et considérons la représentation régulière associée à $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, présentée en exemple 1.3.3, et le caractère χ^{reg} correspondant. Puisque $X(\epsilon) = I_n$, nous avons d'une part $\chi^{reg}(\epsilon) = |G|$.

D'autre part, considérons la base canonique $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \ldots, \boldsymbol{g_n}\}$ et déterminons $X(g)$ dans cette base. Remarquons que $X(g)$ est une matrice de permutation sous l'action de g sur $\mathcal{B}$. Cela implique que $\chi^{reg}(g)$ vaut le nombre de points fixes de la permutation associée. Mais s'il existe i tel que $g\boldsymbol{g_i} = \boldsymbol{g_i}$ alors $g = \epsilon$. Nous en déduisons qu'il n'y a pas de points fixes pour $g \neq \epsilon$. En définitive :

$$\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = \epsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet exemple est important et nous sera utile dans la démonstration du théorème final. ■

Nous allons maintenant énumérer et prouver quelques propriétés intéressantes des caractères.

Proposition 2.2.4. *Soit X une représentation matricielle de degré d d'un groupe G et χ le caractère associé. Alors :*

1. $\chi(\epsilon) = d$,
2. *Si K est une classe de conjugaison de G, alors :*

$$g, h \in K \Rightarrow \chi(g) = \chi(h),$$

3. *Si Y est une représentation de G dont le caractère associé est ψ, alors :*

$$X \cong Y \Rightarrow \chi(g) = \psi(g)$$

pour tout $g \in G$.

Preuve. Rappelons que g et h sont dans la même classe de conjugaison de G s'il existe $h \in G$ tel que $g = khk^{-1}$. Plus généralement, la classe de conjugaison de g est l'ensemble : $\text{cl}(g) = \{kgk^{-1}, k \in G\}$.

1. Puisque $X(\epsilon) = I_d$, $\chi(\epsilon) = \operatorname{tr} I_d = d$.

2. On a immédiatement :

$$\chi(g) = \operatorname{tr} X(g) = \operatorname{tr} X(k)X(h)X(k^{-1}) = \operatorname{tr} X(h) = \chi(h).$$

3. Il s'agit simplement d'une reformulation de la remarque qui suit la définition 2.2.1.

■

Le point 2 de la proposition précédente montre qu'un caractère est une *fonction de classe*, c'est-à-dire une fonction qui est constante sur les classes de conjugaison du groupe. En fin de cette section, nous pourrions en fait prouver qu'une base de l'ensemble fonctions de classe, considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, est l'ensemble des caractères irréductibles.

2.3 Produit scalaire de caractères

Il est remarquable qu'on puisse définir un produit scalaire sur l'ensemble des caractères.

Définition 2.3.1. Soient χ et ψ deux applications de G dans $\mathbb{C}$. Le *produit scalaire* de χ et de ψ est défini par :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

■

Proposition 2.3.2. *Soient χ et ψ deux caractères. Alors :*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

Preuve. Soit X la représentation matricielle de degré d associée à ψ. Nous prouvons que $\psi(g^{-1}) = \overline{\psi(g)}$.

Puisque G est fini, tout élément est d'ordre fini. Il en est donc de même de la matrice $X(g)$. En particulier, $(X(g))^{|G|} = I_d$. Le polynôme $X^{|G|} - 1$ est donc annulateur de $X(g)$ et toutes ses racines sont des racines de l'unité. Il en découle que les racines du polynôme minimal, divisant ce polynôme annulateur, sont des racines de l'unité. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de $X(g)$, les valeurs propres de $X(g^{-1})$ sont par conséquent $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_d^{-1}$. Vu que λ_i est racine de l'unité, nous avons $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. D'où :

$$\psi(g^{-1}) = \operatorname{tr} G(g^{-1}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{d} \overline{\lambda_i} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \right)} = \overline{\psi(g)}.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'ensemble des caractères irréductibles forme une famille orthonormale.

Théorème 2.3.3 (Orthogonalité des caractères irréductibles)**.** *Soient χ et ψ deux caractères irréductibles d'un groupe G. Alors :*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi,\psi}.$$

Preuve. Supposons que les caractères χ et ψ sont associés aux représentations matricielles A et B, de degré respectifs d et f. Soit $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d,f}(C)$ où les $x_{i,j}$ sont n'importe quels complexes, et considérons la matrice suivante :

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) X B(g^{-1}).$$

Une vérification immédiate montre que pour tout $h \in G$, $A(h) Y B(h)^{-1} = Y$, ou encore $A(h) Y = Y B(h)^{-1}$.

Premier cas : supposons que $A \ncong B$. D'après le corollaire 1.6.5, $Y = 0$. Par suite :

$$[Y]_{i,j} = \frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g) x_{k,l} b_{l,j}(g^{-1}) = 0. \tag{2.2}$$

Cette relation est vérifiée quels que soient les $x_{i,j}$ choisis. Il s'ensuit que pour tous i, j, k, l :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g) b_{l,j}(g^{-1}) = 0,$$

ou encore, pour tous i, j, k, l :

$$\langle a_{i,k}, b_{l,j} \rangle = 0.$$

Or $\chi = \operatorname{tr} A = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{d,d}$ et $\psi = \operatorname{tr} B = b_{1,1} + b_{2,2} + \cdots + b_{d,d}$. Nous en déduisons que :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \textstyle\sum_{i,j} \langle a_{i,i}, b_{j,j} \rangle = 0.$$

Deuxième cas : supposons que $A \cong B$. Le point clé de la démonstration est alors de remarquer que nous nous intéressons uniquement aux valeurs prises par les caractères. Étant donné que leurs valeurs sont les mêmes sur l'ensemble des représentations matricielles associées à un même G-module, nous pouvons ici supposer, sans perte de généralité, que $A = B$. Le corollaire 1.6.7 s'applique et fournit :

$$Y = cI_d, c \in \mathbb{C}.$$

En procédant exactement comme dans le premier cas, il est facile de voir que si $i \neq j$ alors $\langle a_{i,k}, b_{l,j} \rangle = 0$. Supposons par la suite que $i = j$. Rappelons que :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) X A(g^{-1}) = cI_d.$$

Prenons la trace des deux côtés :

$$\begin{aligned} cd &= \operatorname{tr} cI_d \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} A(g) X A(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} X \\ &= \operatorname{tr} X. \end{aligned}$$

Ceci montre que $y_{i,i} = c = \frac{1}{d} \operatorname{tr} X$. En reprenant l'expression de l'équation (2.2) pour $i = j$, nous obtenons :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k,l}\sum_{g\in G} a_{i,k}(g)x_{k,l}b_{l,i}(g^{-1}) = \frac{1}{d}(x_{1,1}+x_{2,2}+\cdots x_{d_d}).$$

Cette relation est vraie quels que soient les $x_{k,l}$. Nous pouvons donc identifier les deux côtés de l'équation pour obtenir :

$$\langle a_{i,k}, b_{l,j}\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{i,k}(g)b_{l,i}(g^{-1}) = \frac{1}{d}\delta_{k,l}.$$

En définitive :

$$\langle \chi, \chi\rangle = \sum_{i,j}\langle a_{i,i}, a_{j,j}\rangle = \sum_{i=1}^{d}\langle a_{i,i}, a_{j,j}\rangle = \sum_{i=1}^{d}\frac{1}{d} = 1,$$

et le théorème est démontré. ■

Cette relation d'orthogonalité permet de prouver le théorème suivant, qui montre toute l'utilité et la puissance des caractères.

Théorème 2.3.4. *Soit X une représentation de G et χ son caractère associé. Supposons que :*

$$X = m_1X^{(1)} \oplus m_2X^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_kX^{(k)},$$

où les $X^{(i)}$ sont irréductibles non équivalents deux à deux, de caractères associés $\chi^{(i)}$. Alors :

1. $\chi = m_1\chi^{(1)} + m_2\chi^{(2)} + \cdots + m_k\chi^{(k)}$,
2. $\langle\chi, \chi^{(j)}\rangle = m_j$ *pour tout* j,
3. $\langle\chi, \chi\rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$,
4. *X est irréductible si, et seulement si,* $\langle\chi, \chi\rangle = 1$,
5. *Soit Y une autre représentation matricielle de G de caractère associé ψ. Alors l'équivalence suivante est vérifiée :*
$$X \cong Y \text{ si, et seulement si, } \chi(g) = \psi(g)$$
pour tout $g \in G$.

Preuve. 1. On a directement :

$$\chi = \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} \oplus_{i=1}^{k} m_iX^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} m_i\chi^{(i)}.$$

2. D'après la relation d'orthogonalité des caractères irréductibles :

$$\langle\chi, \chi^{(j)}\rangle = \langle\sum_i m_i\chi^{(i)}, \chi^{(j)}\rangle = \sum_i m_i\langle\chi^{(i)}, \chi^{(j)}\rangle = m_j.$$

3. D'après la relation d'orthogonalité des caractères irréductibles :

$$\langle\chi, \chi\rangle = \langle\sum_i m_i\chi^{(i)}, \sum_j m_j\chi^{(j)}\rangle = \sum_{i,j} m_im_j\langle\chi^{(i)}, \chi^{(j)}\rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2.$$

4. L'implication est contenue dans la relation d'orthogonalité des caractères irréductibles. Pour montrer la réciproque, supposons que :
$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = 1.$$
Il s'ensuit qu'il existe un unique j tel que $m_j = 1$ et tel que si $i \neq j$, alors $m_i = 0$. Mais alors $X = X^{(j)}$, et X est irréductible.

5. Le sens direct constitue le point 3 de la proposition 2.2.4 et a déjà été montré. Pour l'autre sens, supposons que :
$$Y \cong \oplus_{i=1}^{k} n_i X^{(i)}.$$
En outre, nous pouvons supposer que les décompositions de X et de Y contiennent les mêmes irréductibles, quitte à imposer des m_i ou des n_i nuls. Puisque $\chi = \phi$, nous avons pour tout i, $\langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \langle \psi, \chi^{(i)} \rangle$. Le point 2 de ce théorème montre alors que $m_i = n_i$ pour tout i. En d'autres termes, $X \cong Y$.

■

2.4 Décomposition de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$

Les outils que nous avons décrits vont maintenant se révéler utiles pour atteindre notre but.

Lemme 2.4.1. *On a :*
$$\mathbb{C}[\boldsymbol{G}] = \bigoplus_i m_i V^{(i)},$$
cette somme directe étant constituée d'un nombre fini d'irréductibles non équivalents deux à deux. En outre, ***tout*** *G-module irréductible est présent dans cette somme, et la multiplicité m_i de $V^{(i)}$ vaut $\dim V^{(i)}$.*

Preuve. D'après le théorème de Maschke, nous pouvons écrire $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}] = \oplus_i m_i V^{(i)}$. De plus, nous pouvons supposer que **tout** G-module irréductible est présent dans cette somme en imposant $m_i = 0$ lorsque cela est nécéssaire. Notons $\chi^{(i)}$ le caractère associé à $V^{(i)}$. D'après le point 2 du théorème 2.3.4 :
$$m_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{(i)}(g^{-1}).$$
D'autre part, l'exemple 2.2.3 nous indique que $\chi(\epsilon) = |G|$ et que si $g \neq \epsilon$, alors $\chi(g) = 0$. Nous en déduisons, d'après le point 1 de la proposition 2.2.4, que :
$$m_i = \frac{1}{|G|} \chi(\epsilon) \chi^{(i)}(\epsilon^{-1}) = \chi^{(i)}(\epsilon^{-1}) = \dim V^{(i)}.$$
Par conséquent, toute représentation irréductible apparaît dans la décomposition de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, sa multiplicité étant égale à sa dimension, non nulle. Finalement, puisque $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ est de dimension finie, la somme directe est constituée d'un nombre fini de termes. ■

Théorème 2.4.2. *Soit G et un groupe fini et supposons que $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}] = \oplus_i m_i V^{(i)}$ de telle sorte que la famille des $V^{(i)}$ soit constituée de tous les irréductibles, deux à deux non équivalents. Alors :*

1. $m_i = \dim V^{(i)}$,
2. $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$,
3. *le nombre de $V^{(i)}$ présents dans la décomposition de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, autrement dit le nombre de représentations irréductibles de G, est égal au nombre de classes de conjugaison de G.*

Preuve. Le point 1 a déjà été prouvé dans le lemme 2.4.1 et le point 2 s'obtient en prenant la dimension des deux côtés de l'égalité $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}] = \oplus_i m_i V^{(i)}$.

Le dernier point est plus délicat. Nous savons, d'après le théorème 2.1.11, que le nombre de $V^{(i)}$ est égal à la dimension de $Z_{\mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]}$. Nous allons construire un isomorphisme entre $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ et $\mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ afin de montrer que :

$$\text{le nombre de } V^{(i)} = \dim Z_{\mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]} = \dim Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]} = \text{ le nombre de classes d'équivalences de } G.$$

À cet effet, prenons $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ et définissons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\boldsymbol{v}} : \mathbb{C}[\boldsymbol{G}] & \rightarrow & \mathbb{C}[\boldsymbol{G}] \\ \boldsymbol{w} & \mapsto & \boldsymbol{wv}. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que $\phi_{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$. Considérons ensuite l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{C}[\boldsymbol{G}] & \rightarrow & \mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}] \\ \boldsymbol{v} & \mapsto & \phi_{\boldsymbol{v}}. \end{array}$$

La linéarité de ϕ est évidente. Montrons que le noyau de ϕ est réduit à $\mathbf{0}$. Supposons pour cela que $\phi_{\boldsymbol{v}}$ soit l'application nulle. Alors en particulier :

$$\mathbf{0} = \phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon v} = \boldsymbol{v}.$$

Montrons finalement sa surjectivité. Soit $\theta \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, posons $\boldsymbol{v} = \theta(\boldsymbol{\epsilon})$ et montrons que $\theta = \phi_{\boldsymbol{v}}$. En effet, pour tout $g \in G$:

$$\theta(\boldsymbol{g}) = \theta(g\boldsymbol{\epsilon}) = g\theta(\boldsymbol{\epsilon}) = g\boldsymbol{v} = \boldsymbol{gv} = \phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{g}).$$

θ et $\phi_{\boldsymbol{v}}$ coincident sur une base de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ et donc sur $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ tout entier. Il est ensuite facile de voir que pour tous $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, nous avons : $\phi_{\boldsymbol{v}}\phi_{\boldsymbol{w}} = \phi_{\boldsymbol{wv}}$. On parle donc d'anti-isomorphisme d'algèbre entre $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ et $\mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, l'ordre de la multiplication étant inversé. Cela implique tout de même que les centres de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ et de $\mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$ sont isomorphes. Il en découle que :

$$\text{nombre de } V^{(i)} = \dim Z_{\mathrm{End}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]} = \dim Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]}.$$

Étudions maintenant de plus près les élèments de $Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]}$. Soit $z = c_1\boldsymbol{g_1} + c_2\boldsymbol{g_2} + \cdots c_n\boldsymbol{g_n} \in Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]}$ avec $g_i \in G$. Par définition du centre de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, pour tout $h \in G$, nous avons $\boldsymbol{zh} = \boldsymbol{hz}$, ou encore $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{hzh}^{-1}$. Ainsi, pour tout $h \in G$:

$$c_1\boldsymbol{g_1} + c_2\boldsymbol{g_2} + \cdots c_n\boldsymbol{g_n} = c_1\boldsymbol{hg_1h}^{-1} + c_2\boldsymbol{hg_2h}^{-1} + \cdots c_n\boldsymbol{hg_nh}^{-1}.$$

Mais lorsque h parcourt G, hg_ih^{-1} parcourt la classe d'équivalence de g_i. De plus, pour tout $h \in G$, $i \neq j$ implique que $hg_ih^{-1} \neq hg_jh^{-1}$. Vu que la famille des $\boldsymbol{g_i}$ est une base de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$, cela impose que le coefficient devant tous les éléments d'une même classe d'équivalence soit identique. En d'autres mots, si G admet k classes de conjugaison $K_1, K_2, \ldots K_k$ et si l'on pose $\boldsymbol{z_i} = \sum_{g \in K_i} \boldsymbol{g}$ pour i entre 1 et k, alors nous venons de montrer que tout $\boldsymbol{z} \in Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]}$ est de la forme :

$$\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{k} d_i \boldsymbol{z}_i,$$

avec $d_i \in \mathbb{C}$. Réciproquement, il est clair que tout élément de cette forme est dans $Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]}$. La famille $\{\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \ldots, \boldsymbol{z_k}\}$ est donc génératrice. Elle est clairement libre, étant donné que les $\boldsymbol{z_i}$ sont constitués de sous-ensembles disjoints d'éléments de la base $\{\boldsymbol{g}, g \in G\}$ de $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$. En conclusion :

$$\dim Z_{\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]} = k = \text{ le nombre de classes d'équivalences de } G.$$

■

3 Représentations du groupe symétrique

La théorie de la représentation du groupe symétrique est un cas particulier de la théorie de la représentation des groupes finis. Néanmoins, cette première théorie est plutôt bien connue et se voit être utilisée dans la théorie des fonctions symétriques et en mécanique quantique lors d'études de systèmes de particules.

Dans cette section, nous détérminons toutes les représentations irréductibles de S_n et nous prouvons la formule annoncée en introduction.

3.1 Classes de conjugaisons de S_n

Définition 3.1.1. Soit $\pi \in S_n$. Le *type* de π est une expression de la forme :

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n}),$$

où m_k est le nombre de cycles de π de longueur k. ■

Par exemple, la permutation $\pi = (1, 2, 3)(4)(5)$ est de type $(1^2, 2^0, 3^1, 4^0, 5^0)$.

Définition 3.1.2. Une *partition* λ de n est une suite

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l),$$

la suite des λ_i étant décroissante. Si λ est une partition de n, on note alors $\lambda \vdash n$. ■

On peut associer à un type d'une permutation de S_n une partition de n en répétant k m_k fois dans la partition.

Par exemple, la partition qui correspond à la permutation $\pi = (1, 2, 3)(4)(5)$ est $\lambda = (3, 1, 1)$.

Proposition 3.1.3. *Deux permutations sont dans la même classe de conjugaison de S_n si, et seulement si elles ont même type.*

Preuve. Soit $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_l) \cdots (i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n) \in \mathcal{S}_n$. Il est facile de voir que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors :

$$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_l)) \cdots (\sigma(i_m), \sigma(i_{m+1}), \ldots, \sigma(i_n)).$$

Ainsi, si deux permutations sont dans la même classe de conjugaison, alors elles ont même type. Réciproquement, si π et π' ont même type, alors il existe σ telle que $\pi' = \sigma\pi\sigma^{-1}$. ■

Il existe donc une bijection naturelle entre les partitions des n et les classes de conjugaison de S_n.

3.2 Tableaux et tabloides

Nous allons présenter les diagrammes de Ferrers, les tableaux de Young, les tabloides et les polytabloides. Ces objets nous seront nécéssaires afin de construire les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_n$.

Définition 3.2.1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \vdash n$. Le *diagramme de Ferrers de forme* λ, est un tableau de points constitué de l lignes alignées à gauche, la ligne i contenant λ_i points. ■

Par exemple, le diagramme de Ferrer de $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ est :

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

Définition 3.2.2. Soit $\lambda \vdash n$. Un *tableau de Young de forme* λ, ou encore λ-*tableau* est un diagramme de Ferrers de λ dans lequel les points ont été remplacés par tous les entiers entre 1 et n, chacun apparaissant une unique fois. Un λ-tableau est noté t^λ et on désigne par $t_{i,j}$ l'entier placé en i-ième ligne et j-ième colonne. ■

Ces tableaux ont été introduits par Alfred Young en 1900. Grâce aux tableaux de Young, il fut le premier à déterminer les représentations irréductibles du groupe symétrique.

Il y a clairement $n!$ tableaux de Young distincts de forme $\lambda \vdash n$. Par exemple, tous les tableaux de Young de forme $\lambda = (2,1)$ sont :

$$t^\lambda : \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & \end{matrix}.$$

Nous définissons ensuite une relation d'équivalence sur les tableaux de Young.

Définition 3.2.3. Deux λ-tableaux t_1 et t_2 sont dits *équivalents en termes de lignes*, ou simplement *équivalents*, si les lignes de t_1 et de t_2 contiennent les mêmes éléments. C'est une relation d'équivalence. Un *tabloide de forme* λ, ou λ-*tabloide*, est la classe d'équivalence d'un λ-tableau. La classe d'un λ-tabloide t est notée $\{t\}$:

$$\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}.$$

■

Pour indiquer qu'un tableau est un tabloide, nous séparerons ses lignes par des traits pour montrer que l'ordre des éléments d'une ligne n'a pas d'importance. Par exemple, si

$$t = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix},$$

alors :

$$\{t\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}, \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & \end{matrix} \right\} = \begin{array}{l} \hline 1 \;\; 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

Nous pouvons ensuite faire agir S_n naturellement sur un tableau $t = (t_{i,j})$ de forme $\lambda \vdash n$ en posant :

$$\pi t = (\pi(t_{i,j})).$$

Par exemple :

$$(1,2,3) \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & \end{matrix}.$$

Cette action peut être étendue aux tabloides en posant :

$$\pi\{t\} = \{\pi t\}.$$

Il est clair que cette action est bien définie, en le sens où elle indépendante du représentant t choisi. Cette action donne donc naissance à un S_n-module :

Définition 3.2.4. Soit $\lambda \vdash n$. On pose :

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\boldsymbol{\{t_1\}}, \boldsymbol{\{t_2\}}, \dots, \boldsymbol{\{t_k\}}\} = \{c_1\boldsymbol{\{t_1\}} + c_2\boldsymbol{\{t_2\}} + \cdots + c_k\boldsymbol{\{t_k\}}, \quad c_i \in \mathbb{C}\}.$$

M^λ est appelé le *module de permutation correspondant à* λ. ■

Notons que nous n'avons pas utilisé des crochets, chose que nous avions faite pour $\mathbb{C}[\boldsymbol{G}]$. En effet, ici M^λ n'est pas muni d'une structure d'algèbre : on ne sait pas multiplier deux tabloides entre eux.

D'autre part, si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$, en posant $\lambda! = \lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!$, nous avons :

$$\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}.$$

En effet, $\lambda! = \lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!$ est le nombre de λ-tableaux.

Exemple 3.2.5. Examinons le cas $\lambda = (n)$. Alors $M^{(n)} = \mathbb{C}\{\overline{\underline{\;\mathbf{1}\;\;\mathbf{2}\;\;\cdots\;\;\boldsymbol{n}\;}}\}$ qui est muni de l'action triviale. On retrouve donc la représentation triviale. ■

Exemple 3.2.6. Examinons le cas $\lambda = (1^n)$. Chaque classe d'équivalence est constituée d'un seul tableau ayant n lignes. En « transposant » ce tableau, nous pouvons l'identifier à une permutation, écrite en notation habituelle. On en déduit que $M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}S_n$, et on retrouve donc la représentation régulière. ■

Exemple 3.2.7. Examinons le cas $\lambda = (n-1, 1)$. Chaque λ-tabloide est alors uniquement déterminé par l'entier se trouvant en seconde ligne. On peut alors créer un isomorphisme naturel de modules, de sorte que :

$$M^{(n-1,1)} \cong \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}.$$

On retrouve donc la représentation par permutation. ■

Le module M^λ possède la propriété utile d'être un module cyclique.

Définition 3.2.8. Un G-module M est *cyclique* s'il existe $\boldsymbol{v} \in M$ tel que

$$M = \mathbb{C}G\boldsymbol{v},$$

où $G\boldsymbol{v} = \{g\boldsymbol{v}, g \in G\}$. On dit alors que M est *engendré* par $\boldsymbol{v}$. ■

Étant donnés deux λ-tabloides $\{t_1\}$ et $\{t_2\}$, il existe une permutation π telle que $\{t_1\} = \pi\{t_2\}$. M^λ est donc cyclique. En conclusion :

Proposition 3.2.9. *Soit $\lambda \vdash n$. Alors M^λ est un S_n-module cyclique, engendré par n'importe quel λ-tabloide. De plus,* $\dim M^\lambda = n!/\lambda!$*, nombre égal au nombre de λ-tabloides distincts.*

3.3 Domination

Notre approche utilisera un ordre partiel sur les tabloides. Cela classifiera en quelque sorte les tabloides et nous aménera à plusieurs propriétés intéressantes.

Définition 3.3.1. Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ deux partitions de n. On dit que λ *domine* μ si, pour tout $i \geq 1$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i.$$

Si $i > l$ (resp. $i > m$), on pose $\lambda_i = 0$ (resp. $\mu_i = 0$). Si λ domine μ, on note $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Remarquons que nous venons de définir une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des partitions. Par exemple, $(3,3) \trianglerighteq (2,2,1,1)$, mais $(3,3)$ et $(4,1,1)$ ne sont pas comparables.

Le lemme suivant est fondamental :

Lemme 3.3.2 (Lemme de domination des partitions)**.** *Soit t^λ un tableau de forme λ et s^μ un tableau de forme μ. Si, pour tout i, les éléments de la ligne i de s^μ se trouvent dans des colonnes différentes de t^λ, alors $\lambda \trianglerighteq \mu$.*

Preuve. Par hypothèse, nous pouvons réordonner les éléments de t^λ par colonne de manière à ce que les éléments des lignes $1, 2, \ldots, i$ de s^μ se retrouvent tous dans les i premières lignes de t^λ. En effet, il suffit de « remonter » les éléments de t^λ colonne par colonne pour obtenir le réordonnement souhaité. Par conséquent, pour tout i :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i &= \text{nombre d'éléments sur les } i \text{ premières rangées de } t^\lambda \\ &\geq \text{nombre d'éléments sur les } i \text{ premières rangées de } s^\mu \\ &= \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i. \end{aligned}$$

■

3.4 Modules de Specht

Nous construisons enfin les modules irréductibles de $\mathcal{S}_n$. D'après ce qui a été dit précédemment, le nombre de modules irréductibles de $\mathcal{S}_n$ est égal au nombre de classes d'équivalence de $\mathcal{S}_n$, lui-même égal au nombre de partitions de n. À chaque partition de n nous assoçions un module de Specht et nous prouverons dans la section suivante que les modules de Specht sont irréductibles et non équivalents deux à deux.

Étant donné un ensemble A, on rappelle que $\mathcal{S}_A$ est l'ensemble des permutations de A.

Définition 3.4.1. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les colonnes d'un tableau t. On définit le *stabilisateur des colonnes de t*, noté C_t, par l'ensemble des permutations suivantes :

$$C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \mathcal{S}_{C_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}.$$

■

C_t est donc l'ensemble des permutations qui laissent les colonnes de t globalement invariantes. Autrement dit, si $\sigma \in C_t$, alors pour tout i, les éléments i-ième colonne de t sont exactement ceux de la i-ième colonne de σt.

Par exemple, si $t = \begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{matrix}$, alors $C_t = \mathcal{S}_{\{3,4\}} \times \mathcal{S}_{\{1,5\}} \times \mathcal{S}_{\{2\}}$.

Définition 3.4.2. Soit H un sous-ensemble de S_n. On définit alors $H^- \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ par :

$$H^- = \sum_{\pi \in H} \operatorname{sgn}(\pi)\pi.$$

Soit t un tableau. On définit $\kappa_t \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ par :

$$\kappa_t \overset{\text{déf}}{=} C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} \operatorname{sgn}(\pi)\pi.$$

■

Remarquons que nous n'avons pas mis les éléments de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ en gras. En effet, les éléments de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ vont agir sur les vecteurs de M^λ, qui eux seront en gras.

La proposition suivante donne un moyen de calculer κ_t.

Proposition 3.4.3. *Soit t un tableau dont les colonnes sont $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Alors :*

$$\kappa_t = \kappa_{C_1}\kappa_{C_2}\cdots\kappa_{C_k}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi\in C_t} \operatorname{sgn}(\pi)\pi &= \sum_{\pi_1\pi_2\cdots\pi_k} \operatorname{sgn}(\pi_1\pi_2\cdots\pi_k)\pi_1\pi_2\cdots\pi_k \\
&= \left(\sum_{\pi_1\in\mathcal{S}_{C_1}} \operatorname{sgn}(\pi_1)\pi_1\right)\left(\sum_{\pi_2\in\mathcal{S}_{C_2}} \operatorname{sgn}(\pi_2)\pi_2\right)\cdots\left(\sum_{\pi_k\in\mathcal{S}_{C_k}} \operatorname{sgn}(\pi_k)\pi_k\right) \\
&= \kappa_{C_1}\kappa_{C_2}\cdots\kappa_{C_k},
\end{aligned}$$

la première somme portant sur les permutations telles que $\pi_1\pi_2\cdots\pi_k \in \mathcal{S}_{C_1}\times\mathcal{S}_{C_2}\times\cdots\times\mathcal{S}_{C_k}$. ■

La définition suivante permet d'associer à un tableau t un élément du module M^λ.

Définition 3.4.4. Soit t un tableau. Le *polytabloide* associé à t est :

$$\boldsymbol{e}_t = \kappa_t\{\boldsymbol{t}\} = \left(\sum_{\pi\in C_t}\operatorname{sgn}(\pi)\pi\right)\{\boldsymbol{t}\}.$$

■

Par exemple, en reprenant $t = \begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{matrix}$, nous avons :

$$\kappa_t = (\epsilon-(3,4))(\epsilon-(1,5)) = \epsilon-(3,4)-(1,5)+(3,4)(1,5).$$

Par suite :

$$\boldsymbol{e}_t = \begin{array}{c}\hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{5} \\ \hline\end{array} - \begin{array}{c}\hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{5} \\ \hline\end{array} - \begin{array}{c}\hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{5}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{1} \\ \hline\end{array} + \begin{array}{c}\hline \mathbf{3}\ \ \mathbf{5}\ \ \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{4}\ \ \mathbf{1} \\ \hline\end{array}.$$

Le lemme suivant montre comment se comportent les différents objets que nous avons introduits sous l'action d'une permutation.

Lemme 3.4.5. *Soit t un tableau et π une permutation. Alors :*

1. $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$,
2. $\kappa_{\pi t} = \pi\kappa_t\pi^{-1}$,
3. $\boldsymbol{e}_{\pi t} = \pi\boldsymbol{e}_t$.

Preuve. Désignons par $[t]$ l'ensemble des tableaux qui sont équivalents à t en termes de **colonnes**.

1. Les équivalences suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\sigma\in C_{\pi t} &\iff \sigma[\pi t]=[\pi t] \iff \sigma\pi[t]=\pi[t] \iff \pi^{-1}\sigma\pi[t]=[t] \\
&\iff \pi^{-1}\sigma\pi\in C_t \iff \sigma\in\pi C_t\pi^{-1}.
\end{aligned}$$

2. Les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}\kappa_{\pi t} &= \sum_{\sigma\in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma &&= \sum_{\sigma\in \pi C_t\pi^{-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\pi\sigma\pi^{-1})\pi\sigma\pi^{-1}\\ &= \pi\left(\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\right)\pi^{-1} &&= \pi\kappa_t\pi^{-1}.\end{aligned}$$

3. Nous avons les égalités suivantes :

$$\boldsymbol{e}_{\pi t} = \kappa_{\pi t}\{\boldsymbol{\pi t}\} = \pi\kappa_t\pi^{-1}\{\boldsymbol{\pi t}\} = \pi\kappa_t\{\boldsymbol{t}\} = \pi\boldsymbol{e}_t.$$

■

Définissons ce que sont les modules de Specht :

Définition 3.4.6. À toute partition λ, on associe le *module de Specht* S^λ, sous-module de M^λ engendré par l'ensemble des polytabloides $\boldsymbol{e}_t$, t étant de forme λ. ■

Grâce à la troisième partie du lemme 3.4.5, nous avons la propriété suivante :

Proposition 3.4.7. *Les modules S^λ sont des modules cycliques engendrés par n'importe quel polytabloide.*

Exemple 3.4.8. Soit $\lambda = (1^n)$ et fixons

$$t = \begin{matrix}1\\2\\\vdots\\n\end{matrix}\ .$$

Puisque $C_t = \mathcal{S}_n$, on a $\kappa_t = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma$. D'autre part, d'après le lemme 3.4.5, on a :

$$\boldsymbol{e}_{\pi t} = \pi\boldsymbol{e}_t = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\pi)\pi\sigma\{\boldsymbol{t}\}.$$

En remplaçant $\pi\sigma$ par τ, il vient :

$$\pi\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{e}_{\pi t} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\pi^{-1}\tau)\tau\{\boldsymbol{t}\} = (\operatorname{sgn}\pi^{-1})\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\tau)\tau\{\boldsymbol{t}\} = (\operatorname{sgn}\pi)\boldsymbol{e}_t.$$

Chaque polytabloide est donc un multiple scalaire de $\boldsymbol{e}_t$. Il s'ensuit que $S^{(1^n)} = \mathbb{C}\{\boldsymbol{e}_t\}$, muni de l'action $\pi\boldsymbol{e}_t = (\operatorname{sgn}\pi)\boldsymbol{e}_t$. On a donc retrouvé la représentation par signature.

3.5 Théorème du sous-module

Nous démontrons que les modules de Specht sont irréductibles et non équivalents deux à deux en utilisant le théorème du sous-module. Nous présentons d'abord un lemme suivi de deux corollaires.

Rappelons qu'étant donné un sous-ensemble H de S_n, on note $H^- = \sum_{\pi\in H}(\operatorname{sgn}\pi)\pi$. Nous considérerons également l'unique produit scalaire sur M^λ vérifiant :

$$\langle\{\boldsymbol{t}\},\{\boldsymbol{s}\}\rangle = \delta_{\{t\},\{s\}}.$$

Lemme 3.5.1 (Lemme de la signature)**.** *Soit H un sous-groupe de S_n.*

1. *Si $\pi \in H$ alors :*
$$\pi H^- = H^- \pi = (\operatorname{sgn} \pi) H^-,$$
2. *Pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M^\lambda$:*
$$\langle H^- \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, H^- \boldsymbol{v} \rangle,$$
3. *Si la transposition (b, c) appartient à H, alors on peut écrire H^- sous la forme factorisée suivante :*
$$H^- = k(\epsilon - (b, c)),$$
avec $k \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$,
4. *Si b et c sont deux éléments appartenant à la même ligne d'un tableau t et si $(b, c) \in H$ alors :*
$$H^- \{\boldsymbol{t}\} = \boldsymbol{0}.$$

Preuve. 1. On a :
$$\pi H^- = \sum_{\sigma \in H} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi \sigma = \sum_{\tau \in H} \operatorname{sgn}(\pi^{-1} \tau) \tau = (\operatorname{sgn} \pi) H^-.$$
On montre de même que $H^- \pi = (\operatorname{sgn} \pi) H^-$.

2. Utilisons le fait que notre produit scalaire soit invariant sous l'action de $\mathcal{S}_n$:
$$\langle H^- \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{\pi \in H} \langle (\operatorname{sgn} \pi) \pi \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{\pi \in H} \langle \boldsymbol{u}, (\operatorname{sgn} \pi) \pi^{-1} \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{\pi \in H} \langle \boldsymbol{u}, (\operatorname{sgn} \pi^{-1}) \pi \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, H^- \boldsymbol{v} \rangle$$

3. Considérons le sous-groupe $K = \{\epsilon, (b, c)\}$ de H. Il existe alors des éléments $k_i \in S_n$ tels que $H = \biguplus_i k_i K$, avec $\biguplus$ désignant la somme disjointe. En effet, il suffit de considérer la relation d'équivalence $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y^{-1} x \in K$ définie sur H. L'ensemble des classes d'équivalence $\{K_1, K_2, \ldots, K_l\}$ forme une partition de H. Il ne reste plus qu'à choisir des k_i vérifiant $k_i \in K_i$ pour tout i.
Alors :
$$H^- = \sum_{\pi \in H} (\operatorname{sgn} \pi) \pi = \sum_i \big((\operatorname{sgn} k_i) k_i + (\operatorname{sgn} (b, c) k_i)(b, c) k_i \big) = \left(\sum_i (\operatorname{sgn} k_i) k_i \right) (\epsilon - (b, c)),$$
et le résultat en découle car $\sum_i (\operatorname{sgn} k_i) k_i \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$.

4. Par hypothèse, $(b, c)\{\boldsymbol{t}\} = \{\boldsymbol{t}\}$. Par conséquent :
$$H^- \{\boldsymbol{t}\} = k(\epsilon - (b, c))\{\boldsymbol{t}\} = k(\{\boldsymbol{t}\} - \{\boldsymbol{t}\}) = \boldsymbol{0}.$$

■

Rappelons que si t est un tableau, alors on désigne par C_t le stabilisateur des colonnes de t, c'est-à-dire l'ensemble des permutations laissant les colonnes invariantes. Il est clair que C_t est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$: le lemme précédent est donc applicable avec $H = C_t$.

Corollaire 3.5.2. *Soient λ, μ deux partitions de n, $t = t^\lambda$ un λ-tableau et $s = s^\mu$ un μ-tableau.*
1. *Si $\kappa_t \{\boldsymbol{s}\} \neq \boldsymbol{0}$, alors $\lambda \trianglerighteq \mu$,*
2. *Si $\lambda = \mu$, alors $\kappa_t \{\boldsymbol{s}\} = \pm \boldsymbol{e}_t$.*

Preuve. 1. Soient b et c deux éléments d'une même ligne de s^μ. Alors b et c ne sont pas dans la même colonne de t^λ. En effet, dans le cas contraire, la transposition (b,c) appartiendrait à C_t, ce qui impliquerait $\kappa_t\{\boldsymbol{s}\} = 0$ d'après le lemme précédent. Le lemme de domination des partitions (lemme 3.3.2) s'applique donc et implique que $\lambda \trianglerighteq \mu$.

2. Si $\lambda = \mu$, alors il existe $\pi \in C_t$ tel que $\{s\} = \pi\{t\}$ en utilisant le même argument qui a démontré le lemme de domination des partitions, à savoir la « remontée » progressive des éléments de λ colonne par colonne. Alors d'après la partie 1 du lemme, avec $\kappa_t = H^-$:

$$\kappa_t\{\boldsymbol{s}\} = \kappa_t\pi\{\boldsymbol{t}\} = (\operatorname{sgn}\pi)\kappa_t\{\boldsymbol{t}\} = (\operatorname{sgn}\pi)\boldsymbol{e}_t = \pm\boldsymbol{e}_t.$$

■

Corollaire 3.5.3. *Soient $\mu \vdash n$, t un μ-tableau et $\boldsymbol{u} \in M^\mu$. Alors $\kappa_t\boldsymbol{u}$ est un multiple de $\boldsymbol{e}_t$.*

Preuve. Puisque $\boldsymbol{u} \in M^\mu$, on écrit $\boldsymbol{u}$ sous la forme $\boldsymbol{u} = \sum_i c_i\{\boldsymbol{s_i}\}$, les $\{\boldsymbol{s_i}\}$ étant des μ-tableaux. D'après le corollaire précédent, nous en tirons :

$$\kappa_t\boldsymbol{u} = \sum_i c_i\kappa_t\{\boldsymbol{s_i}\} = \sum_i \pm c_i\boldsymbol{e}_t.$$

■

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème du sous-module.

Théorème 3.5.4 (Théorème du sous-module, James, 1976)**.** *Soit U un sous-module de M^μ. Alors :*

$$S^\mu \subseteq U \quad ou \quad U \subseteq (S^\mu)^\perp.$$

Preuve. Considérons un $\boldsymbol{u} \in U$ et un μ-tableau t. D'après le corollaire précédent, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\kappa_t\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{e}_t$. Il faut séparer deux cas suivants les valeurs prises par c.

Premier cas : il existe $\boldsymbol{u}$ et t tels que $f \neq 0$. Vu que $\boldsymbol{u} \in U$, nous avons donc $c\boldsymbol{e}_t = \kappa_t\boldsymbol{u} \in U$. Puisque $c \neq 0$, il s'ensuit que $\boldsymbol{e}_t \in U$. Or S^μ est un module cyclique engendré par n'importe quel polytabloide. En définitive, $S^\mu \subseteq U$.

Deuxième cas : nous avons toujours $\kappa_t\boldsymbol{u} = 0$. Montrons que $U \subseteq (S^\mu)^\perp$. Pour cela, considérons un $\boldsymbol{u} \in U$ et un μ-tableau t. Appliquons ensuite la partie 2 du lemme de la signature (lemme 3.5.1) avec $H = \kappa_t$:

$$\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_t\rangle = \langle\boldsymbol{u}, \kappa_t\{\boldsymbol{t}\}\rangle = \langle\kappa_t\boldsymbol{u}, \{\boldsymbol{t}\}\rangle = \langle\boldsymbol{0}, \{\boldsymbol{t}\}\rangle = 0.$$

Or $\boldsymbol{e}_t$ engendre S^μ. Donc pour tout $\boldsymbol{e} \in S^\mu$, $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}\rangle = 0$. Cela montre que $\boldsymbol{u} \in (S^\mu)^\perp$. ■

Nous aurons besoin d'une dernière propriété qui servira pour montrer que les modules de Specht sont non équivalents deux à deux.

Proposition 3.5.5. *Soient λ, μ deux partitions de n. S'il existe un homomorphisme $\theta \in \operatorname{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\lambda)$ non nul, alors $\lambda \trianglerighteq \mu$.*

Preuve. Puisque l'ensemble des polytabloides engendre S^λ par défintion et puisque $\theta \neq 0$, nous pouvons choisir un polytabloide $\boldsymbol{e}_t$ tel que $\theta(\boldsymbol{e}_t) \neq \boldsymbol{0}$. Or $M^\lambda = S^\lambda + \left(S^\lambda\right)^\perp$. Prolongeons donc θ sur M^λ tout entier, en posant $\theta\left(\left(M^\lambda\right)^\perp\right) = \boldsymbol{0}$. Cela implique que θ est maintenant un élément de $\operatorname{Hom}_{S_n}(M^\lambda, M^\mu)$.

Alors :

$$\mathbf{0} \neq \theta(\boldsymbol{e}_t) = \theta(\kappa_t\{\boldsymbol{t}\}) = \kappa_t\theta(\{\boldsymbol{t}\}) = \kappa_t\left(\sum_i c_i\{\boldsymbol{s_i}\}\right),$$

où les s_i sont des μ-tableaux. Il existe donc un indice j tel que $\kappa_t\{\boldsymbol{s_j}\} \neq \mathbf{0}$. La partie 1 du corollaire 3.5.2 fournit immédiatement le résultat cherché.

■

Nous démontrons finalement que les modules de Specht réalisent nos prédictions.

Théorème 3.5.6. *Soit n un entier fixé. L'ensemble des modules de Specht S^λ, pour $\lambda \vdash n$, est constitué de tous les S_n-modules irréductibles non équivalents deux à deux.*

Preuve. Soit $\lambda \vdash n$ et montrons que S^λ est irréductible. Par l'absurde, supposons que S^λ soit réductible. Il possède alors un sous-module non trivial U. Cela implique que $U \subset S^\lambda$. Le theorème du sous-module fournit que $U \subseteq \left(S^\lambda\right)^\perp$. Or $S^\lambda \cap \left(S^\lambda\right)^\perp = \mathbf{0}$, ce qui est contradictoire. S^λ est donc irréductible.

Soient $\lambda, \mu \vdash n$, $\lambda \neq \mu$ et montrons que S^λ et S^μ ne sont pas équivalents. Par l'absurde, supposons que $S^\lambda \cong S^\mu$. Il existe alors un homomorphisme non nul $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_n}(S^\lambda, S^\mu)$. Comme $S^\mu \subseteq M^\mu$, nous avons $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_n}(S^\lambda, M^\mu)$. D'après la proposition 3.5.5, $\lambda \trianglerighteq \mu$. De même, il vient que $\mu \trianglerighteq \lambda$. En conclusion, $\lambda = \mu$.

L'ensemble des S^λ est donc constitué d'un nombre de modules irréductibles non équivalents deux à deux égal au nombre de partitions de n. Or d'après ce qui a été dit précédemment, le nombre de partitions de n est égal au nombre de classes de conjugaisons de $\mathcal{S}_n$, lui-même égal au nombre de modules irréductibles de $\mathcal{S}_n$. ■

3.6 Tableaux standards

Nous trouvons ici la dimension d'un module de Specht S^λ en exhibant une de ses bases. Il se trouve qu'une base de S^λ est la famille des polytabloides $\boldsymbol{e}_t$, t étant un tableau de Young standard. La dimension de S^λ sera donc égale au nombre de tableaux de Young standards de forme λ.

Définition 3.6.1. Un tableau t est *standard* si les éléments de n'importe quelle ligne ou colonne forment une suite croissante. Nous dirons alors que le tabloide $\{t\}$ ou le polytabloide $\boldsymbol{e}_t$ associés sont standards.
■

Par exemple, si :

$$t_1 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array} \quad \text{et} \quad t_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array},$$

alors t_1 est standard mais t_2 ne l'est pas.

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 3.6.2. *La famille $\{\boldsymbol{e}_t$, t est un λ-tableau standard $\}$ est une base de S^λ.*

La démonstration se fera en deux temps. Nous montrons d'abord que cette famille est libre en introduisant un ordre partiel sur les tabloides, puis nous montrons qu'elle est génératrice.

Définition 3.6.3. Une *composition de n* est une suite d'entiers positifs ou nuls $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l)$ vérifiant $\sum_i \lambda_i = n$. Les entiers entiers λ_i sont appelés *éléments* de la composition. ■

Une composition n'est pas forcément une partition vu que nous n'imposons pas la décroissance de la suite. Ainsi, $(1,3,2)$ et $(3,2,1)$ sont des compositions de 6, mais seule cette dernière est une partition de 6.

Si λ est une composition, nous définissons naturellement un tableau de forme λ. Notons que pour qu'un tableau soit standard il faut nécéssairement que sa forme soit une partition (une case vide est par définition supérieure à tout entier). La définition de domination pour des compositions est exactement la même que la définition de domination pour des partitions (définition 3.3.1).

Définition 3.6.4. Soit $\{t\}$ un tabloide de forme $\lambda \vdash n$. Pour tout i entre 1 et n, on pose :

$$\{t^i\} = \text{le tabloide formé par tous les éléments de } \{t\} \text{ inférieurs à } i,$$

et

$$\lambda^i = \text{la forme de } \{t^i\}, \text{ qui est une composition.}$$

■

Par exemple, prenons $\{t\} = \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$.

Alors :

$$\{t^1\} = \begin{array}{c}\hline \emptyset\\ \hline 1\\ \hline\end{array}\,,\quad \{t^2\} = \begin{array}{c}\hline 2\\ \hline 1\\ \hline\end{array}\,,\quad \{t^3\} = \begin{array}{cc}\hline 2 & \\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}\,,\quad \{t^4\} = \begin{array}{cc}\hline 2 & 4\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}\,,$$

$$\lambda^1 = (0,1), \qquad \lambda^2 = (1,1), \qquad \lambda^3 = (1,2), \qquad \lambda^4 = (2,2).$$

Nous pouvons définir une notion de domination sur les tabloides.

Définition 3.6.5. Soient $\{s\}$ et $\{t\}$ deux tabloides dont les suites de composition sont respectivement λ^i et μ^i. Alors $\{s\}$ *domine* $\{t\}$ si pour tout i, $\lambda^i \trianglerighteq \mu^i$. On note $\{s\} \trianglerighteq \{t\}$. ■

Il existe un lemme de domination pour les tabloides.

Lemme 3.6.6 (Lemme de domination des tabloides)**.** *Si k et l sont deux entiers, tels que $k < l$ et k apparaisse dans une ligne plus basse que l dans $\{t\}$, alors $\{t\} \triangleleft (k,l)\{t\}$.*

Preuve. C'est clair, puisqu'appliquer la transposition (k,l) sur $\{t\}$ revient à déplacer un entier plus petit sur une ligne plus élevée. ■

Définition 3.6.7. Soit $\boldsymbol{v} = \sum_i c_i \boldsymbol{\{t_i\}} \in M^\mu$. Le tabloide $\boldsymbol{\{t_i\}}$ *apparaît* dans $\boldsymbol{v}$ si $c_i \neq 0$. ■

Étant donné un tableau $(t_{i,j})$, on dit que la j-ième colonne est croissante si $t_{1,j} < t_{2,j} < \cdots < t_{i,j} < \cdots$. Le lemme de domination des tabloides fournit la proposition suivante :

Proposition 3.6.8. *Si t est standard et si $\boldsymbol{\{s\}}$ apparaît dans $\boldsymbol{e}_t$, alors $\{t\} \trianglerighteq \{s\}$.*

Preuve. Soit s un tableau tel que $\boldsymbol{\{s\}}$ apparaisse dans e_t, et considérons la permutation π telle que $s = \pi t$. Notons qu'elle existe de par la définition même de $\boldsymbol{e}_t$. Nous faisons une récurrence sur le nombre d'inversions de type colonne, noté $i_c(s)$, c'est-à-dire le nombre de paires (k,l) avec $k < l$ telles que k et l soient situés dans une même colonne de s, k étant situé sur une ligne plus basse que l.

Si $i_c(s) = 0$, c'est que les colonnes de s sont croissantes, de sorte que $s = t$ car π stabilise les colonnes de t, colonnes qui sont croissantes.

Si $i_c(s) > 0$, alors on considère une inversion de type colonne (k,l). D'après le lemme 3.6.6, $\{s\} \triangleleft (k,l)\{s\}$. Or $(k,l)\{s\}$ possède strictement moins d'inversions de type colonne que $\{s\}$. L'hypothèse de récurrence est applicable, et fournit $(k,l)\{s\} \trianglelefteq \{t\}$. En somme $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$, et la proposition est montrée. ■

Cette proposition montre que $\{\boldsymbol{t}\}$ est maximal dans $\boldsymbol{e}_t$ en ce sens que :

Définition 3.6.9. Soit $(A, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Un élément $b \in A$ est un *majorant de* A si $b \geq c$ pour tout $c \in A$. Un élément b est *maximal* s'il n'existe pas $c \in A$ avec $c > b$. ■

Il est fondamental de voir qu'un majorant est maximal, mais que la réciproque n'est pas nécéssairement vraie.

Lemme 3.6.10. *Soient* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ *des éléments de* M^μ*. Supposons que pour chaque* $\boldsymbol{v}_i$ *nous puissions choisir un tabloide* $\{\boldsymbol{t_i}\}$ *apparaissant dans* $\boldsymbol{v}_i$ *tel que :*

1. $\{\boldsymbol{t_i}\}$ *soit un majorant de l'ensemble des tableaux apparaissant dans* $\boldsymbol{v_i}$*,*
2. *Les* $\{\boldsymbol{t_i}\}$ *soient tous distincts deux à deux.*

Alors la famille $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ *est libre.*

Preuve. Quitte à réindexer les indices, nous pouvons supposer que $\{\boldsymbol{t_1}\}$ est maximal parmi les $\{\boldsymbol{t_i}\}$. Les conditions du lemme permettent d'affirmer que $\{\boldsymbol{t_1}\}$ n'apparaît que dans $\boldsymbol{v}_1$. Considérons une combinaison linéaire nulle :

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}.$$

Il s'ensuit que $c_1 = 0$, puisque c'est le seul choix qui permette d'annuler le tabloide $\{t_1\}$. Par récurrence sur m, tous les autres coefficients sont nuls. ■

Proposition 3.6.11. *La famille* $\{e_t,\ t$ *est un* λ*-tableau standard* $\}$ *est libre dans* S^λ*.*

Preuve. Par la proposition 3.6.8, pour tout tableau standard t, $\{t\}$ est un majorant des éléments de $\boldsymbol{e}_t$. Tous les tableaux standards considérés étant deux à deux distincts, le lemme précédent s'applique et montre que la famille $\{e_t,\ t$ est un λ-tableau standard $\}$ est libre dans S^λ. ■

3.7 Éléments de Garnir

Nous allons prouver que l'ensemble des polytabloides standards de forme λ engendre S^λ. L'idée est la suivante.

Soit t un λ-tableau. Il suffit de prouver que $\boldsymbol{e}_t$ s'écrit comme combinaison linéaires de polytabloides standards de forme λ. Si les colonnes de t ne sont croissantes, considérons la permutation $\sigma \in C_t$ telle que le tableau $s = \sigma t$ a ses colonnes croissantes. Alors d'après les lemmes 3.4.5 (point 3) et 3.5.1 (point 1) :

$$\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{e}_{\sigma t} = \sigma \boldsymbol{e}_t = \sigma C_t^- \{\boldsymbol{t}\} = (\operatorname{sgn}\sigma) C_t^- \{\boldsymbol{t}\} = (\operatorname{sgn}\sigma)\boldsymbol{e}_t.$$

$\boldsymbol{e}_s$ est donc combinaison linéaire de polytabloides standards si, et seulement s'il en est de même de $\boldsymbol{e}_t$. On peut donc supposer que les colonnes de t sont croissantes.

Supposons ensuite que nous puissions trouver des permutations π vérifiant :

1. Dans chaque tableau πt, une *descente en terme de ligne* (deux éléments consécutifs d'une ligne rangés dans l'ordre décroissant) a été supprimée,
2. L'élément $g = \epsilon + \sum_\pi (\operatorname{sgn}\pi)\pi \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ vérifie la relation $g\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}$.

Mais alors $\boldsymbol{e}_t = -\sum_\pi (\operatorname{sgn}\pi)\boldsymbol{e}_{\pi t}$. $\boldsymbol{e}_t$ serait donc une combinaison linéaire de polytabloides qui posséderaient une descente de moins et une récurrence serait envisageable.

Définition 3.7.1. Soient A et B deux ensembles disjoints d'entiers strictement positifs. Soient π des permutations telles que :

$$\mathcal{S}_{A\cup B} = \biguplus_{\pi} \pi(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B).$$

L'élément de Garnir correspondant est :

$$g_{A,B} = \sum_{\pi} (\operatorname{sgn} \pi)\pi.$$

■

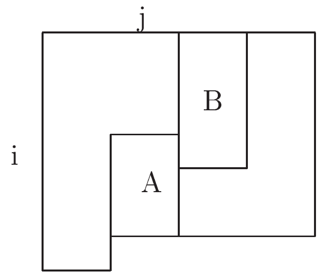
L'existence des permutations π provient du fait que $\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b$ soit un sous-groupe de $\mathcal{S}_{A\cup B}$. Notons que $g_{A,B}$ dépend non seulement de A, B mais aussi des permutations π. Nous dirons lesquelles choisir bientôt.

Un moyen pour déterminer ces permutations π peut être de considérer toutes les paires possibles d'ensembles (A', B') vérifiant $A' \uplus B' = A \uplus B$ et d'associer à chaque paire la permutation π vérifiant $\pi(A, B) = (A', B')$. Par exemple, si $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4\}$, à $(A', B') = (\{2, 5\}, \{4, 6\})$ on associe $\pi = (2, 6)$. Ce π n'est pas unique : nous aurions très bien pu choisir $\pi = (2, 4, 6, 5)$.

Supposons qu'il existe une descente dans un tableau t telle que $t_{i,j} > t_{i,j+1}$. L'élément de Garnir va permettre de l'éliminer.

Définition 3.7.2. Soit t un tableau, A et B les ensembles des éléments de respectivement la j-ième et $(j+1)$-ième colonne de t. L'élément de Garnir associé à t (et à A, B) est $g_{A,B} = \sum_\pi (\operatorname{sgn} \pi)\pi$, où les π ont été choisis de sorte que les éléments de $A \cup B$ soient croissants dans les colonnes de πt. ■

Il nous suffira en fait de prendre pour A (resp. B) les éléments se trouvant en dessous de $t_{i,j}$ (resp. au dessus de $t_{i,j+1}$) comme le montre le tableau suivant :



Donnons plus de sens à la fin de la définition : une fois une permutation π effectuée sur t, nous pouvons encore changer l'ordre des éléments dans chacune des colonnes, ce qui correspond à faire des permutations « intérieures » aux ensembles A' et B'. Nous choisissons donc la permutation qui range ensuite les éléments de A et B en ordre croissant.

Remarquons de plus que la descente disparaît bien après permutation du fait que les colonnes de t étaient croissantes au départ. Par exemple, prenons le tableau suivant avec la descente $5 > 4$:

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array},$$

avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4\}$. Chaque ensemble (A', B') détermine le tableau t' correspondant ainsi que l'élément $g_{A,B}$ correspondant :

$$\begin{array}{rccccccccccc}
 & \begin{matrix}1&2&3\\5&4&\\6&&\end{matrix} & , & \begin{matrix}1&2&3\\4&5&\\6&&\end{matrix} & , & \begin{matrix}1&4&3\\2&5&\\6&&\end{matrix} & , & \begin{matrix}1&2&3\\4&6&\\5&&\end{matrix} & , & \begin{matrix}1&4&3\\2&6&\\5&&\end{matrix} & , & \begin{matrix}1&5&3\\2&6&\\3&&\end{matrix} \; , \\
t' : & & & & & & & & & & & \\
g_{A,B} = & \epsilon & - & (4,5) & + & (2,4,5) & + & (4,6,5) & - & (2,4,6,5) & + & (2,5)(4,6).
\end{array}$$

On pourra vérifier qu'on a bien $g_{A,B}\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}$ et remarquer que la descente a disparu dans les cinq tableaux qui ne sont pas égaux à t.

Proposition 3.7.3. *Soit t un tableau, $t_{i,j} > t_{i,j+1}$ une descente en terme de ligne, A et B définis comme ci-dessus ainsi que l'élément de Garnir $g_{A,B}$ correspondant. Alors $g_{A,B}\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}$.*

Preuve. Nous prouvons d'abord que $\mathcal{S}^-_{A\cup B}\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}$. Soit $\sigma \in C_t$ quelconque. Par définition, il existe $a, b \in A \cup B$ tels que a et b apparaissent dans la même ligne de σt. Comme $(a, b) \in \mathcal{S}_{A\cup B}$, le lemme de la signature (lemme 3.5.1, point 4) s'applique et fournit $\mathcal{S}^-_{A\cup B}\boldsymbol{\{\sigma t\}} = \mathbf{0}$. Il s'ensuit que $\mathcal{S}^-_{A\cup B}\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}$ vu que σ est un élément quelconque de C_t.

D'autre part, nous savons que $\mathcal{S}_{A\cup B} = \biguplus_\pi \pi(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b)$. Par conséquent, $\mathcal{S}^-_{A\cup B} = g_{A,B}(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b)^-$. Remplaçons ceci dans l'expression ci-dessus pour obtenir :

$$g_{A,B}(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b)^-\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}.$$

Or $\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b \subseteq C_t$. Ainsi, si $\sigma \in \mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b$, alors $\sigma \in C_t$ et le lemme de la signature (lemme 3.5.1, point 1) montre que :

$$(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\boldsymbol{e}_t = (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma C_t^-\boldsymbol{\{t\}} = (\operatorname{sgn}\sigma)^2 C_t^-\boldsymbol{\{t\}} = C_t^-\boldsymbol{\{t\}} = \boldsymbol{e}_t.$$

Il en découle que $(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_b)^-\boldsymbol{e}_t = |\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B|\boldsymbol{e}_t$, et le résultat s'en suit. ■

L'idée est maintenant de n'utiliser non pas une équivalence en termes de lignes, mais une équivalence en termes de colonnes. Notons $[t]$ la classe d'équivalence en termes de colonnes d'un tableau t. Nous définissons la domination des tabloides en termes de colonnes ainsi que le lemme de domination des tabloides en termes de colonnes de la manière que pour les lignes, mais en remplaçant « ligne » par « colonne ».

Proposition 3.7.4. *La famille $\{e_t,\ t$ est un λ-tableau standard $\}$ est génératrice dans S^λ.*

Preuve. Posons $S = \mathrm{Vect}\{e_t,\ t$ est un λ-tableau standard $\}$. D'après les remarques en début de cette sous-section, si $\boldsymbol{e}_t \in S$, alors il en est de même pour tout $s \in [t]$ car il existe alors $\sigma \in C_t$ telle que $s = \sigma t$.

Il est facile de voir que l'ensemble des polytabloides partiellement ordonné par $\trianglerighteq$ possède $[t_0]$ comme majorant, où t_0 est le tableau obtenu en numérotant ses cases de gauche à droite puis de haut en bas, dans cet ordre. t_0 est standard de sorte que si $s \in [t_0]$, alors $s \in S$.

Soit t un tableau quelconque. Nous pouvons supposer par récurrence que si $[s] \trianglerighteq [t]$, alors $s \in S$. Supposons en outre que t n'est pas standard, auquel cas c'est fini. D'après ce que nous avons dit précédemment, nous pouvons supposer que les colonnes de t sont croissantes. t possède donc une descente en termes de lignes, disons $t_{i,j} > t_{i,j+1}$. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_q$ respectivement les éléments de la j-ième et $(j+1)$-ième colonne. Nous nous trouvons donc dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc}
a_1 & & b_1 \\
 & & \wedge \\
a_2 & & b_2 \\
 & & \wedge \\
\vdots & & \vdots \\
 & & \wedge \\
a_i & > & b_i \\
\wedge & & \\
\vdots & & \vdots \\
\wedge & & b_q \\
a_p & &
\end{array}$$

On considère donc $A = \{a_i, \ldots, a_p\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_i\}$ et l'élément de Garnir $g_{A,B}$ associé. D'après la proposition 3.7.3, $g_{A,B}\boldsymbol{e}_t = \mathbf{0}$ de sorte que :

$$\boldsymbol{e}_t = -\sum_{\pi \neq \epsilon} (\operatorname{sgn} \pi) \boldsymbol{e}_{\pi t}. \tag{3.1}$$

Or $b_1 < b_2 < \cdots < b_i < a_i < \cdots < a_p$. Cela signifie que si l'on effectue une permutation non triviale de $\{b_1, b_2, \ldots, b_i\} \cup \{a_i, \ldots, a_p\}$, alors un b_m se trouve déplacé dans la j-ième colonne. Comme b_m est plus petit que tous les a_k, cela impose que $[\pi t] \trianglerighteq [t]$ pour $\pi \neq \epsilon$. Finalement, tous les termes de droite de l'équation 3.1 appartiennent à S. Il en est donc de même de $\boldsymbol{e}_t$, ce qui termine la preuve. ■

3.8 Conclusion

Nous avons donc montré que la famille $\{e_t,\ t$ est un λ-tableau standard $\}$ est une base de S^λ. En notant f^λ le nombre de tableaux de Young standards de forme λ, il vient que $\dim S^\lambda = f^\lambda$.

Nous avons également montré (théorème 3.5.6) que pour n fixé, l'ensemble des modules de Specht S^λ, pour $\lambda \vdash n$, est constitué de tous les S_n-modules irréductibles non équivalents deux à deux.

Rappelons enfin le théorème 2.4.2 :
Si G est un groupe fini et $\left(V^{(i)}\right)$ une famille complète de modules irréductibles de G deux à deux non équivalentes, alors $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$.

En définitive :

Théorème 3.8.1. *Soit f^λ le nombre de tableaux de Young standards de forme λ. Alors :*

$$\sum_{\lambda \vdash n} \left(f^\lambda\right)^2 = n!$$

4 Algorithmes combinatoires

Dans cette section, nous donnons une interprétation purement combinatoire de la formule

$$\sum_{\lambda \vdash n} \left(f^{\lambda}\right)^2 = n!$$

en construisant une bijection entre deux ensembles d'objets combinatoires. Le premier ensemble sera les couples de tableaux de Young standards de même forme et le second ensemble sera l'ensemble des permutations. Nous allons donc associer une permutation à un couple de tableaux de Young standards de même forme, et réciproquement.

4.1 Algorithme d'insertion

Définition 4.1.1. Un tableau partiel est un tableau dont les lignes et les colonnes sont croissantes.

Étant donnés un tableau partiel P et un entier x n'appartenant pas à P, nous décrivons comment *insérer* x dans P :

Assigner $R :=$ la première ligne de P
Tant que il existe un élément de R plus petit que x **faire**
☞ Soit y le plus petit élément de R supérieur à x. Remplacer y par x dans le tableau.
☞ Assigner $x := y$ et $R :=$ la ligne suivante.
Fin Tant que
Placer x en dernière position sur la ligne R.

Par exemple, insérons $x = 3$ dans le tableau

$$P = \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & & \\ 6 & & & \\ 9 & & & \end{matrix} .$$

Nous mettons en gras les éléments qui sont remplacés ou déplacés lors de l'insertion.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 8 & \leftarrow \mathbf{3} \\ 4 & 7 & & & \\ 6 & & & & \\ 9 & & & & \end{matrix} , \quad \begin{matrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 8 & \\ 4 & 7 & & & \leftarrow \mathbf{5} \\ 6 & & & & \\ 9 & & & & \end{matrix} , \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 8 & \\ 4 & \mathbf{5} & & & \\ 6 & & & & \leftarrow \mathbf{7} \\ 9 & & & & \end{matrix} , \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & & \\ 6 & \mathbf{7} & & \\ 9 & & & \end{matrix} .$$

Si P' est le tableau obtenu en insérant x dans P, alors on note $P' = r_x(P)$. Remarquons que d'après l'algorithme, P' reste un tableau standard.

4.2 Algorithme de Robinson-Schensted

Soit $\pi = \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \in \mathcal{S}_n$. Nous construisons une suite de couples de tableaux standards récursivement d'après l'algorithme suivant :

Commencer avec un couple $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$ de tableaux vides.
Si (P_{k-1}, Q_{k-1}) a été construit, définir (P_k, Q_k) par :

☞ $P_k = r_{x_k}(P_{k-1})$,

☞ $Q_k =$ le tableau obtenu en plaçant k dans la case (i, j) de Q_{k-1}, où (i, j) est la case dans laquelle l'insertion de x_k dans P_{k-1} s'est terminée.

On note alors $P = P(\pi) = P_n$ et $Q = Q(\pi) = Q_n$, ou encore :

$$\pi \xrightarrow{\text{R-S}} (P, Q).$$

Remarquons que d'après l'algorithme, pour tout k, Q_k est un tableau partiel et P_k, Q_k ont la même forme. À la fin de l'algorithme nous nous retrouvons donc avec deux tableaux standards de même forme. À titre d'exemple, prenons :

$$\pi = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{array},$$

et exécutons l'algorithme entièrement :

$$\begin{array}{ll} P_k : & \emptyset\ ,\ 4\ ,\ \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array},\ \begin{array}{ll} 2 & 3 \\ 4 \end{array},\ \begin{array}{lll} 2 & 3 & 6 \\ 4 \end{array},\ \begin{array}{lll} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{array},\ \begin{array}{lll} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 \end{array},\ \begin{array}{llll} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 \end{array} = P, \\ Q_k : & \emptyset\ ,\ 1\ ,\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array},\ \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 \end{array},\ \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{array},\ \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{array},\ \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 \end{array},\ \begin{array}{llll} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 6 \end{array} = Q \end{array}.$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{array} \xrightarrow{\text{R-S}} \left(\begin{array}{llll} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 \end{array}, \begin{array}{llll} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 6 \end{array} \right).$$

4.3 Algorithme inverse

Théorème 4.3.1. *L'application*

$$\pi \xrightarrow{R\text{-}S} (P, Q)$$

est une bijection entre les éléments de $\mathcal{S}_n$ et l'ensemble des couples de tableaux standards de même forme.

Preuve. Pour prouver qu'il s'agit bien d'une bijection, il nous suffit de construire une application inverse. Étant donnés (P_k, Q_k) nous déterminons (P_{k-1}, Q_{k-1}) et x_k suivant l'algorithme suivant (nous supposons qu'il existe une ligne au-dessus de la première ligne de P_k contenant uniquement des zéros pour simplifier l'algorithme), en notant $P_{i,j}$ l'entier se trouvant dans la case (i, j) de P_k :

Soit (i, j) la case dans laquelle se trouve k dans Q_k.

☞ Assigner $x := P_{i,j}$ et effacer $P_{i,j}$ du tableau.
☞ Assigner $R :=$ la $(i-1)$-ième ligne de P_k.

Tant que R n'est pas la 0-ième ligne de P_k **faire**
☞ Soit y le plus grand élément de R inférieur à x. Remplacer y par x dans R.
☞ Assigner $x := y$ et $R :=$ la ligne d'au-dessus.
Fin Tant que

Assigner $x_k := x$.

Il est facile de voir que P_{k-1} est P_k après avoir subi l'algorithme et que Q_{k-1} est Q_k à l'intérieur duquel nous avons supprimé k. La permutation est donc retrouvée en appliquant l'algorithme à (P_n, Q_n) jusqu'à (P_1, Q_1). ■

Nous en déduisons donc une nouvelle preuve du théorème 3.8.1. En effet, l'algorithme de Robinson-Schensted assure que le nombre de couples de tableaux standards de même forme est égal au nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$. Une forme d'un tableau est une partition de n, et $\left(f^\lambda\right)^2$ désigne le nombre de couples de tableaux standards de même forme λ, d'où le résultat.

5 Programmation de l'algorithme de Robinson-Schensted

On stocke un tableau de Young de deux manières :

On le stocke à l'intérieur d'une matrice de taille plus grande. Les éléments de la première ligne et colonne valent 0 et fixent le « contour » du tableau. Une case qui ne fait pas partie du tableau de Young contient l'élément ∞ qui sera ici l'entier `maxint`. On prendra pour `maxint` la longueur de la permutation augmentée d'une unité. On parle de forme complète.

On le stocke sous forme de vecteur dont le i-ième élément est le vecteur contenant les éléments de la i-ième ligne du tableau. On parle de forme réduite.

5.1 Implémentation de l'algorithme direct

```
let init nmaxi =
    let m = make_matrix nmaxi nmaxi nmaxi in
    for i=0 to nmaxi-1 do
        m.(0).(i)<-0;
        m.(i).(0)<-0;
    done;
m;;
```

☞ `init nmaxi` renvoie une matrice `nmaxi` $\times$ `nmaxi` initialisée à `nmaxi`, sauf la première ligne et colonne qui contiennent 0.

```
let display matrice maxint=
print_newline ();
    for i=1 to maxint - 1 do
        for j=1 to maxint - 1 do
            let aux = matrice.(i).(j) in
            if aux != maxint then ( print_int aux ; print_string "␣"; )
        done;
        if matrice.(i).(1) != maxint then print_newline ();
    done;;
```

☞ `display matrice nmaxi maxint` affiche la sous-matrice de taille `maxint-1` $\times$ `maxint-1` de `matrice`. Les entiers égaux à `maxint` ne sont pas affichés.

```
let insere elt t maxint=
let j= ref 1 in
    let rec aux i x =
        j:=1;
        while x>t.(i).(!j) do j:=!j+1 done;
        let y=t.(i).(!j) in
            t.(i).(!j)<-x;
            if y=maxint then (i,!j) else aux (i+1) y
    in
aux 1 elt;;
```

☞ insere elt t maxint insère l'élément elt dans le tableau t par le truchement d'une fonction auxiliaire récursive aux i x. Celle-ci insère x dans la i-ème ligne du tableau. Au final, le tableau t est modifié et insere elt t maxint renvoie la case dans laquelle l'insertion a fini.

```
let r_s perm =
let n= vect_length perm and maxint = (vect_length perm +1) in
let p = (init maxint) and q = (init maxint) in
      for i=0 to (n-1) do
          let (ins1, ins2) = insere perm.(i) p maxint in
              q.(ins1).(ins2) <- (i+1)
      done;
display p n maxint;
display q n maxint;;
```

☞ r_s perm affiche le couple de tableaux de Young associés à la permutation perm.

```
let r_s_total perm =
let n= vect_length perm and maxint = (vect_length perm + 1)in
let p = (init maxint) and q = (init maxint) in
   for i=0 to (n-1) do
       let (ins1, ins2)= insere perm.(i) p maxint in
           q.(ins1).(ins2) <- (i+1)
   done;
(p,q);;
```

☞ r_s_total perm retourne le couple de matrices contenant les tableaux de Young associés à la permutation perm.

Par exemple, nous obtenons :

```
#r_s [|4;2;3;6;5;1;7|];;

1 3 5 7
2 6
4

1 3 4 7
2 5
6
- : unit = ()
```

et :

```
#r_s_total [|4;2;3;6;5;1;7|];;
- : int vect vect * int vect vect =
 [|[|0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0|]; [|0; 1; 3; 5; 7; 8; 8; 8|];
   [|0; 2; 6; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 4; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];
```

```
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]|],
 [|[|0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0|]; [|0; 1; 3; 4; 7; 8; 8; 8|];
  [|0; 2; 5; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 6; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|];
  [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]; [|0; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8|]|]
```

5.2 Implémentation de l'algorithme inverse

```
let cherche t elt =
    let place = ref (0,0) in
    for i=0 to (vect_length t)-1 do
        for j=0 to (vect_length t.(i)) - 1 do
            if t.(i).(j)=elt then place := (i,j)
        done;
    done;
!place;;
```

☞ `cherche t elt` retourne les coordonnées de la case du tableau `t` qui contient l'entier `elt`.

```
let cherche_max t i x=
    let maxi = ref (0,0) in
    for k=0 to (vect_length t.(i)) - 1 do
        if (t.(i).(k)> fst (!maxi) && t.(i).(k)<x) then
            maxi := (t.(i).(k),k)
    done;
!maxi;;
```

☞ `cherche_max t i x` cherche le plus grand entier inférieur à `x` dans la `i`-ième ligne du tableau `t` et retourne le couple formé par cet élément et son indice de colonne.

```
let taille p =
    let t = ref 0 in
    for i=0 to (vect_length p) - 1 do
    t := !t + vect_length p.(i)
    done;
!t;;
```

☞ `taille p` retourne le nombre d'éléments du tableau de Young `p` présenté sous forme réduite.

```
let s_r (p,q) =
    let supprime (p,q) k =
        let (i,j) = cherche q k in
        let x = ref p.(i).(j) and r = ref (i-1) in
        p.(i).(j) <- 0 ;
        while !r >= 0 do
            let (y,k) = cherche_max p !r !x in
            p.(!r).(k) <- !x ;
            x := y ;
            r := !r - 1;
        done;
    !x in

let dim = taille p in
let perm = make_vect dim 0 in
for n=0 to (dim-1) do
    perm.(dim-n-1) <- (supprime (p,q) (dim-n))
done;
perm;;
```

☞ `s_r (p,q)` retourne la permutation produite par l'algorithme inverse de celui de Robinson-Schensted à partir du couple de tableaux de Young `(p,q)` présentés sous forme réduite.

Par exemple, nous obtenons :

```
#s_r ( [|[|1;3;5;7|]; [|2;6|]; [|4|]|] , [|[|1;3;4;7|]; [|2;5|]; [|6|]|] );;
- : int vect = [|4; 2; 3; 6; 5; 1; 7|]
```

5.3 Implémentation d'autres fonctions sur les tableaux de Young

```
let complet_to_reduit (p,q) =
    let c_t_r p =
        let maxint = (vect_length p) in
        let x = ref 0 and y= ref 0 in
        for i=1 to (maxint-1) do
            if p.(i).(1) != maxint then x:= !x +1;
            if p.(1).(i) != maxint then y:= !y +1
        done;

    let t = make_vect !x ([| |]) in
        for i= 0 to (!x-1) do
            let taille = ref 0 in
            for j=0 to (!y-1) do
                if  p.(i+1).(j+1) != maxint then taille:= !taille +1
            done;
            let ligne = make_vect (!taille) 0 in
```

```
          for j=0 to (!taille-1) do
          ligne.(j) <- p.(i+1).(j+1)
          done;
          t.(i) <- ligne
      done;
      t  in
(c_t_r p, c_t_r q);;
```

☞ `complet_to_reduit (p,q)` prend en entrée un couple de tableaux de Young sous forme complète et renvoie ce couple de tableaux sous forme réduite.

```
let reduit_to_complet (p,q)=
    let r_t_c p =
        let maxint = (taille p) + 1 in
        let t = make_matrix maxint maxint maxint in
        for i=0 to (maxint-1) do
            t.(0).(i)<-0;
            t.(i).(0)<-0;
        done;

        for i=0 to (vect_length p) - 1 do
            for j=0 to (vect_length p.(i)) - 1 do
                t.(i+1).(j+1) <- p.(i).(j)
            done;
        done;
    t in
(r_t_c p, r_t_c q);;
```

☞ `reduit_to_complet (p,q)` prend en entrée un couple de tableaux de Young sous forme réduite et renvoie ce couple de tableaux sous forme complète.

```
let permute n =
    let echange v i j = let tmp=v.(i) in v.(i)<-v.(j); v.(j)<-tmp in
    let v = make_vect n 0 in
    for i = 0 to (n-1) do v.(i) <- (i+1) done;

    let rec aux i =
        if i>0 then (
        echange v i (random__int (i+1));
        aux (i-1);)
   in
aux (vect_length v - 1);
v;;
```

☞ `permute n` renvoie de manière aléatoire une permutation de longueur `n`.

5.4 Exemple d'utilisation

Prenons une permutation aléatoire π, effectuons d'abord l'algorithme direct, puis l'algorithme inverse et vérifions que nous retombons bien sur π.

```
#let pi = permute 10;;
pi : int vect = [|6; 2; 1; 8; 10; 9; 7; 4; 3; 5|]
```

```
#let (p,q)=r_s_total pi;;
p : int vect vect =
 [|[|0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0|];
   [|0; 1; 3; 5; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 2; 4; 9; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 6; 7; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 8; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 10; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|]|]
q : int vect vect =
 [|[|0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0|];
   [|0; 1; 4; 5; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 2; 6; 10; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 3; 7; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 8; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 9; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|];
   [|0; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11; 11|]|]
```

```
#let (p2,q2) = complet_to_reduit (p,q);;
p2 : int vect vect = [|[|1; 3; 5|]; [|2; 4; 9|]; [|6; 7|]; [|8|]; [|10|]|]
q2 : int vect vect = [|[|1; 4; 5|]; [|2; 6; 10|]; [|3; 7|]; [|8|]; [|9|]|]
```

```
#let pi2= s_r (p2,q2);;
pi2 : int vect = [|6; 2; 1; 8; 10; 9; 7; 4; 3; 5|]
```

Nous avons bien `pi=pi2`.

Références

[1] B. Sagan, *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2nde édition, Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] R.Bedard, *Représentation des groupes*, Recueil de notes du cours MAT7400. `http://www.lacim.uqam.ca/~bedard/notes/recueil_MAT7400.html`

[3] J-B. Zuber, *Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations*, Réédition d'octobre 2005, Cours donné au Magistère Interuniversitaire de Physique, Printemps 1994. http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/gr.pdf

[4] W. Fulton et J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer-Verlag, 1991.