Réduction de Jordan et tableaux de Young

Igor Kortchemski

Juin 2006

Résumé

Ce texte est un recueil de notes prises lors d'un exposé de Rached Mneimné. Il met en évidence les liens intimes entre la réduction de Jordan, les tableaux de Young et la notion de similitude entre les matrices.

Introduction

Partons de deux exemples de relations d'équivalence définies sur les matrices :

$$\begin{aligned} A \overset{\mathrm{r}}{\equiv} B &\iff \text{il existe } P, Q \text{ inversibles telles que } A = PBQ, \\ A \overset{\mathrm{pg}}{\equiv} B &\iff \text{il existe } P \text{ inversible telle que } A = PB. \end{aligned}$$

La première relation d'équivalence s'appelle la r-équivalence ; nous savons que A et B sont r-équivalentes si, et seulement si, A et B ont même rang. D'autre part, nous pouvons dire une chose similaire sur la deuxième relation d'équivalence : A et B sont pg-équivalentes si, et seulement si, le noyau de A et le noyau de B sont les mêmes. Autrement dit :

$$\begin{aligned} A \overset{\mathrm{r}}{\equiv} B &\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B, \\ A \overset{\mathrm{pg}}{\equiv} B &\iff \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B. \end{aligned}$$

Nous avons donc transformé ces relations d'équivalence en « égalités » : nous les avons en quelque sorte caractérisés.

Une autre relation d'équivalence fondamentale sur les matrices est la notion de similitude. Nous la définissons de la manière suivante :

$$A \sim B \iff \text{il existe } P \text{ inversible telle que } A = PBP^{-1}.$$

On dit alors que A et B sont semblables. Ce texte propose une méthode qui va transformer la relation de similitude en une « égalité » par le truchement de la réduction de Jordan.

Dans toute la suite de ce texte, nous prendrons pour corps de base des espaces vectoriels le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui possède le bon goût d'être infini et algébriquement clos.

1 Étude du cas particulier des matrices nilpotentes

1.1 Suite des noyaux itérés

Cette étude est fondée sur la suite des noyaux itérés. Étant donnée une matrice nilpotente A de taille $n \times n$, considérons la suite des noyaux :

$$\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} A^k = \mathbb{K}^n.$$

L'existence d'un entier k tel que $\operatorname{Ker} A^k = \mathbb{K}^n$ est assurée par le fait que A soit nilpotente. On confondera A et l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique. Pour tout i, $1 \leq i \leq k$, on pose $x_i = \dim(\operatorname{Ker} A^i) - \dim(\operatorname{Ker} A^{i-1})$.

Proposition 1.1. *La suite (x_i) est décroissante.*

Preuve. L'idée est d'interpréter x_i comme la dimension d'un espace vectoriel quotient. Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On définit l'espace quotient E/F par l'espace vectoriel quotient [1] résultant de la relation d'équivalence : pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F$. Il est connu que $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

Par conséquent, pour prouver que $x_{i+1} \leq x_i$, il suffit que de prouver que :

$$\dim \operatorname{Ker} A^{i+1}/_{\operatorname{Ker} A^i} \leq \dim \operatorname{Ker} A^i/_{\operatorname{Ker} A^{i-1}}.$$

Il suffit donc de trouver une injection linéaire de $\operatorname{Ker} A^{i+1}/_{\operatorname{Ker} A^i}$ dans $\operatorname{Ker} A^i/_{\operatorname{Ker} A^{i-1}}$. Plus précisément, en notant $\overline{x}$ la classe de x, on définit *l'injection de Frobenius* :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \operatorname{Ker} A^{i+1}/_{\operatorname{Ker} A^i} & \longrightarrow & \operatorname{Ker} A^i/_{\operatorname{Ker} A^{i-1}} \\ \overline{x} & \longmapsto & \overline{A(x)}. \end{array}$$

Il est facile de voir que Φ est linéaire et que si $x \in \operatorname{Ker} A^{i+1}$, alors $A(x) \in \operatorname{Ker} A^i$. Montrons ensuite que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$: soit x tel que $\overline{A(x)} = \overline{0}$. Les équivalences suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{array}{rcl} \overline{A(x)} = \overline{0} & \Longleftrightarrow & A(x) \in \operatorname{Ker} A^{i-1} \\ & \Longleftrightarrow & A^i(x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x \in \operatorname{Ker} A^i \\ & \Longleftrightarrow & \overline{x} = \overline{0}. \end{array}$$

Φ est donc injective, ce qui achève la démonstration. ■

1.2 Tableaux de Young

Définition 1.2. Une *partition* λ de n est une suite

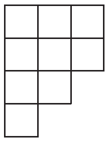
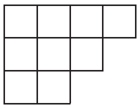
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l),$$

la suite des λ_i étant décroissante. Si λ est une partition de n, on note alors $\lambda \vdash n$. ■

Définition 1.3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \vdash n$. Le *tableau de Young de forme* λ, est un tableau de cases constitué de l lignes alignées à gauche, la ligne i contenant λ_i cases. Le tableau de Young de forme λ^{-1} est celui obtenu en transposant le tableau de forme λ. ■

[1] Le lecteur visualisera peut être mieux cette notion en remarquant que si F et G sont supplémentaire dans E, alors G est isomorphe à $E_{/F}$.

Par exemple, les tableaux de Young de $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ et λ^{-1} sont respectivement :

 et 

Ainsi, $\lambda^{-1} = (4, 3, 2)$.

Définition 1.4. Soit A une matrice nilpotente et (x_i) la suite associée aux noyaux itérés définie ci-dessus. Le *tableau de Young associé à A*, noté $\mathrm{Y}(A)$, est le tableau de Young de forme $(x_1, x_2, \ldots, x_k)^{-1}$. ■

En d'autres termes, pour obtenir le tableau de Young associé à A, il suffit de reporter les sauts de dimension successifs de la suite des noyaux itérés suivant les colonnes du tableau : autrement dit, le nombre de cases de la i-ième colonne du tableau sera égal au saut de dimension entre $\operatorname{Ker} A^{i-1}$ et $\operatorname{Ker} A^i$, c'est-à-dire égal à $\dim \operatorname{Ker} A^i - \dim \operatorname{Ker} A^{i-1}$.

Il est fondamental de voir que par construction, le nombre de cases de la première ligne de $\mathrm{Y}(A)$ est égal à l'indice de nilpotence de A.

1.3 Réduction de Jordan d'une matrice nilpotente

Définition 1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *bloc de Jordan de taille n* la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Remarquons qu'un bloc de Jordan est nilpotent et que son indice de nilpotence est n.

Définition 1.6. Soient A et B sont deux matrices carrées. La matrice par blocs X définie par :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

est appelée *somme directe de A et de B*. On note $X = A \oplus B$. ■

La réduction de Jordan est fondée sur la théorème suivant :

Théorème 1.7. *Soient A une matrice nilpotente de taille n, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ la forme de $\mathrm{Y}(A)$. Alors :*

$$A \sim \bigoplus_i J_{\lambda_i}.$$

Par exemple, si $Y(A) = (3, 3, 2, 1)$, alors la proposition affirme que :

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Nous faisons une preuve par l'exemple pour éviter les triples indices. Supposons que $\mathrm{Y}(A)$ soit de la forme $\lambda = (6, 4, 4, 1)$. L'idée est d'inscrire des vecteurs dans les cases du tableau de Young pour qu'au final nous nous retrouvions avec la bonne base de l'espace. Nous complétons les cases ligne par ligne en partant de la droite de sorte que les éléments de la i-ième colonne forment une base de $\operatorname{Ker} A^i/_{\operatorname{Ker} A^{i-1}}$.

D'après la forme du tableau, l'indice de nilpotence de A est 6. Choisissons donc un vecteur v_1 de $\mathbb{C}^6$ tel que $A^5(v_1) \neq 0$. Plaçons ensuite v_1 dans la dernière case de la première ligne de $\mathrm{Y}(A)$ et remplissons la par $A(v_1), A^2(v_1), \ldots, A^5(v_1)$ pour obtenir :

$A^5(v_1)$	$A^4(v_1)$	$A^3(v_1)$	$A^2(v_1)$	$A(v_1)$	v_1

Comme $A(v_1) \in \operatorname{Ker} A^4/_{\operatorname{Ker} A^3}$, complétons le par v_2, v_3 pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} A^4/_{\operatorname{Ker} A^3}$, qui est bien de dimension 3 d'après la forme du tableau de Young. On place v_2 en bout de deuxième ligne, v_3 en bout de la troisième et on remplit comme précédemment. Il est impératif de voir que $A^3(v_1), A(v_2), A(v_3)$ est également libre dans $\operatorname{Ker} A^3/_{\operatorname{Ker} A^2}$ du fait de l'injection de Frobenius exposée ci-dessus. Choisissons finalement un v_4 tel que $(A^5(v), A^3(v_2), A^3(v_3), v_4)$ forme une base de $\operatorname{Ker} A$. En définitive :

$A^5(v_1)$	$A^4(v_1)$	$A^3(v_1)$	$A^2(v_1)$	$A(v_1)$	v_1
$A^3(v_2)$	$A^2(v_2)$	$A(v_2)$	v_2		
$A^3(v_3)$	$A^2(v_3)$	$A(v_3)$	v_3		
v_4					

L'injection de Frobenius nous assure que $\mathcal{B} = (A^5(v_1), A^4(v_1), \ldots, v_1, A^3(v_2), \ldots, v_2, A^3(v_3), \ldots, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{C}^{15}$. Alors, par construction, dans cette base :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} A = \bigoplus_i J_{\lambda_i},$$

et le résultat s'en suit. ■

1.4 Propriétés utiles des $\mathrm{Y}(A)$

Nous sommes dorénavant en mesure d'exhiber toute la puissance des tableaux de Young sous forme d'une liste de propriétés :

Théorème 1.8. *Soit A une matrice nilpotente de taille n et $T = \mathrm{Y}(A)$ de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$. Alors les points suivants sont vérifiés :*

1. *λ_1 est l'indice de nilpotence de A,*
2. *Le nombre de cases constituant les i premières colonnes est la dimension de $\operatorname{Ker} A^i$,*
3. *Le rang de A^i est le nombre de cases du tableau de Young obtenu en supprimant les i premières colonnes de T.*

Preuve. C'est quasiment immédiat d'après ce qui a été dit précédemment :

1. Nous l'avons déjà vu : par construction, λ_1 est le nombre d'espaces vectoriels distincts de $\mathbb{K}^n$ apparaissants dans la suite des noyaux itérés. C'est aussi la taille du plus grand bloc de Jordan apparaissant dans $\oplus_i J_{\lambda_i}$.
2. C'est clair par construction.
3. C'est clair d'après le théorème du rang puisque T possède n cases.

■

2 Interlude : exercices

Voici quelques exercices qui sont déroutants à première vue. Leur résolution est néanmoins facile en utilisant ce qui précède. Le lecteur pourra consulter leur solution à la fin de ce texte, mais est encouragé à les chercher au préalable.

Exercice 2.1. *L'implication suivante est bien connue :*

$$A \sim B \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \\ \chi_A(X) = \chi_B(X) \\ \mu_A(X) = \mu_B(X), \end{cases}$$

où $\mu_A(X)$ désigne le polynôme minimal de A. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.2. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_8(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} B$. A est-elle nécéssairement semblable à B ?*

Exercice 2.3. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telles que $A^5 = B^5 = 0$ et $\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(B^2) = 2$. A est-elle nécéssairement semblable à B ?*

3 Cas général de la réduction de Jordan

Elle s'énonce ainsi, en prenant pour E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimensie finie :

Théorème 3.1 (Réduction de Jordan d'un endomorphisme)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\chi_f(X)$ son polynôme caractéristique qui se factorise sous la forme :*

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j).$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_s, \end{pmatrix}$$

avec pour tout i, la matrice A_i s'écrivant comme somme directe de blocs de Jordan qui ont λ_i sur la grande diagonale.

Preuve. Il s'agit de se ramener au cas nilpotent. Pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ les sous-espaces caractéristiques de f. D'après le lemme des noyaux, on a $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s$ et les N_i sont stables par f. Pour tout i, on pose $f_i = f_{|N_i}$. On a $f_i \in \mathcal{L}$ et $(f_i - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i} = 0$. Par suite $n_i = f_i - \lambda_i \operatorname{Id}$ est nilpotent. Pour tout i, on applique la réduction de Jordan à l'endomorphisme nilpotent n_i. Il suffit ensuite de réunir les bases utilisées de chaque sous-espace caractéristique pour obtenir la base $\mathcal{B}$ de E souhaitée. ■

L'interprétation en termes de tableaux de Young est quasiment identique : on associe à f les s tableaux de Young correspondant à chaque endomorphisme nilpotent n_i (ou de manière équivalente à chaque valeur propre).

4 Étude de la relation de similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les implications suivantes sont bien connues :

$$\begin{aligned} A \sim B &\implies \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \\ A \sim B &\implies A^k = B^k \\ A \sim B &\implies A - \lambda \mathrm{I}_n \sim B - \lambda \mathrm{I}_n, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que la réciproque est vérifiée, à savoir que $A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n)^k = \operatorname{rg}(B - \lambda \mathrm{I}_n)^k$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.

4.1 Théorème de Jordan

Proposition 4.1. *Soient A, B deux matrices nilpotentes. Alors :*

$$A \sim B \iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)^k = \operatorname{rg}(B - \lambda I_n)^k.$$

Preuve. La seule valeur propre possible de A et de B est 0. Il suffit donc d'examiner le cas où $\lambda = 0$. Les équivalences suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{rg} A^k = \operatorname{rg} B^k &\iff \text{les sauts de dimension dans les suites respectives} \\ & \text{des noyaux itérés sont les mêmes} \\ &\iff \mathrm{Y}(A) = \mathrm{Y}(B). \end{aligned}$$

Le théorème 1.7 permet alors de conclure. ■

Le théorème suivant en découle immédiatement :

Théorème 4.2 (Théorème de Jordan-Weyr)**.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'équivalence suivante est vérifiée :*

$$A \sim B \iff \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)^k = \operatorname{rg}(B - \lambda I_n)^k.$$

4.2 Étude des classes d'équivalence

Nous avons vu que $A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{Y}(A) = \mathrm{Y}(B)$ lorsque A et B sont nilpotentes. Un tableau de Young de forme $\lambda \vdash n$ peut donc être mis en bijection avec une classe d'équivalence pour la relation de similitude. En notant $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n, le nombre de tableaux de Young possible à n cases est donc $p(n)$. Par conséquent :

Proposition 4.3. *Considérons l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le nombre de classes d'équivalences pour la relation de similitude sur cet ensemble est alors $p(n)$.*

Plus généralement, d'après la remarque qui suit la preuve du théorème 3.1 :

Théorème 4.4. *Considérons l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui possèdent le même polynôme caractéristique :*

$$\chi(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j).$$

Le nombre de classes d'équivalences pour la relation de similitude sur cet ensemble est alors $\prod_{i=1}^{s} p(s)$.

5 Solution des exercices

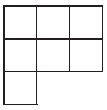
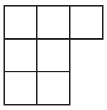
Exercice 2.1. Il suffit de prendre comme contre-exemple les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{|cc|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{|cc|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}.$$

En effet, les conditions sont vérifiées, mais A n'est pas semblable à B car $\operatorname{rg} A^2 = 2$ et $\operatorname{rg} B^2 = 1$. Contrairement aux apparences, cela n'est pas sorti du chapeau. L'implication :

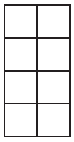
$$A \sim B \Longleftarrow \begin{cases} \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \\ \chi_A(X) = \chi_B(X) \\ \mu_A(X) = \mu_B(X) \end{cases}$$

annonce en effet que si A, B sont nilpotentes et si $\Upsilon(A)$ et $\Upsilon(B)$ ont le même nombre de cases sur la première ligne et sur la première colonne, alors $A = B$. Cela est clairement faux comme le montrent les deux tableaux suivants à partir desquels A et B ont été construits :

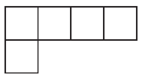

et


Remarquons que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \leq 6$, alors le résultat est vrai.

Exercice 2.2. Oui. Le théorème du rang montre que $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Ker} A = 4$. La première colonne de A comporte donc 4 cases. D'autre part, puisque $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} A$, on a $A^2 = 0$. La première ligne de A comporte donc 2 cases. Comme A possède en tout 8 cases, $\Upsilon(A)$ est forcément le tableau suivant :



Exercice 2.3. Oui. A est nilpotente et le rang de A^2 vaut 2. Il s'ensuit que $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 3$. Les deux premières colonnes de $Y(A)$ possèdent donc 3 cases ; il n'y a qu'une seule possibilité puisque la deuxième colonne contient au moins un élément. Finalement $\Upsilon(A)$ est forcément de la forme :



Notons que nous avons par ailleurs montré que toute matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ vérifiant $A^5 = 0$ et $\operatorname{rg}(A^2) = 2$ est nilpotente d'indice 4.

Références

[1] R. Mneimné, exposé du 13 juin 2006 présenté à la classe de HX2 à Louis le Grand.

[2] X. Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*, 1ère édition, Ellipses, 1994.