Bonnes suites et sommes de termes de même place

Igor Kortchemski

Juillet 2006

Résumé

Dans cet article, nous étudions une propriété spécifique des bonnes suites. Une bonne suite est une suite d'entiers strictement positifs $k = 1, 2, \ldots$ qui vérifie l'unique condition : k apparaît avant la dernière apparition de $k+1$. Nous utilisons une bijection entre l'ensemble des bonnes suites d'une longueur fixée et l'ensemble des permutations de même longueur afin de démontrer une propriété qui fournit une information sur les termes de même place parmi toutes les bonnes suites.

Introduction

Les bonnes suites ont été introduites et étudiées dans [1] par le truchement de deux bijections construites entre l'ensemble des bonnes suites et celui des permutations de même longueur. Nous nous intéressons ici à une conjecture communiquée dans [2] : considérons l'ensemble des bonnes suites G_n de longueur fixée n. On sait, d'après [1], que cet ensemble est fini, plus précisément de cardinal $n!$. Fixons-nous un entier i, et définissons σ_i de la manière suivante :

$$\sigma_i = \sum_{u \in G_n} u(i),$$

où $u(i)$ est l'entier en i-ième position dans la bonne suite u. La conjecture en question stipule que lorsque i varie de 1 à n, les σ_i forment une suite arithmétique. Nous démontrons cette conjecture en prouvant que la raison de cette suite arithmétique est $(n-1)!$ et que $\sigma_1 = \frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$.

1 Préliminaires

En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et propriétés qui ont été établies dans [1] et qui nous seront nécéssaires par la suite. Dans tout ce texte, nous noterons $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de toutes les permutations de $[n]$.

1.1 Bonnes suites

Définition 1.1. Soit n un entier strictement positif. Une suite de n entiers strictement positifs (non nécéssairement distincts) est appelée *bonne suite* si elle satisfait la condition suivante : pour tout entier $k \geq 2$, si le nombre k apparaît dans la suite, alors il en est de même de $k-1$ et, de plus, la première apparition de $k-1$ survient avant la dernière apparition de k.

Par exemple, 2123 est une bonne suite de longueur 4 mais 31312 n'est pas une bonne suite : 2 ne survient pas avant la dernière apparition de 3.

1.2 Bijection entre G_n et $\mathfrak{S}_n$

Nous rappelons ici une bijection entre G_n et $\mathfrak{S}_n$, que l'on notera ici $\mathcal{B}$ par raison de simplicité.

Définition 1.2. Soit $u \in G_n$. On définit un ordre total sur ses éléments, $\prec$, de la manière suivante :

- Si $u_i > u_j$, alors on pose $u_i \succ u_j$,
- Si $u_i = u_j$ et $i > j$, alors on pose $u_i \succ u_j$.

Définition 1.3. Soit $u \in G_n$. On définit $\mathcal{B}(u) \in \mathfrak{S}_n$ par la permutation obtenue en numérotant chaque élément de u du plus petit au plus grand, au sens de la relation d'ordre présentée à la définition précédente, en commençant par 1.

On pourra par exemple vérifier que $\mathcal{B}(31223) = 51324$ et que $\mathcal{B}(3411523) = 5621734$.

1.3 Bijection inverse de $\mathcal{B}$

La bijection inverse de $\mathcal{B}$ nous sera également utile. Pour pouvoir la décrire, une définition est d'abord nécéssaire.

Définition 1.4. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. On pose $\phi_\pi = \{j \in [n-1] \mid j+1 \text{ apparaît à la gauche de } j \text{ dans } \pi\}$ et $C_\pi(x) = \mathrm{Card}\{j \in \phi_\pi \mid j < x\}$.

La bijection inverse est alors construite de la manière suivante :

Proposition 1.5. *Soient $\pi = a_1 a_2 \ldots a_n \in \mathfrak{S}_n$ et u la suite obtenue en remplaçant tout élément a_i de π par $a_i - C_\pi(a_i)$. Alors $u = \mathcal{B}^{-1}(\pi)$.*

2 Sommes de termes de même place

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la conjecture mentionnée en introduction. Rappelons la.

Définition 2.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [n]$. On pose $\sigma_i = \sum_{u \in G_n} u(i)$, où $u(i)$ est l'entier en i-ième position dans la bonne suite u.

Conjecture 2.2. *Lorsque i varie de 1 à n, les σ_i forment une suite arithmétique.*

À titre d'exemple, on pourra vérifier que $G_4 = \{$ 1111, 1112,1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1213, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234, 1323, 2112, 2121, 2122, 2123, 2132, 2212, 2312, 3123 $\}$
de sorte que $\sigma_1 = 33$, $\sigma_2 = 39$, $\sigma_3 = 45$ et $\sigma_4 = 51$.

Nous montrons d'abord la conjecture 2.2 pour ensuite calculer la raison de la suite arithmétique ainsi que σ_1. Dans toute la suite de ce texte, nous fixons un entier strictement positif n.

2.1 Suite arithmétique et σ_i

Un entier $i \in [n-1]$ étant fixé, nous allons partitionner l'ensemble des couples *non ordonnés* d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ en deux parties, $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$, vérifiant les deux propiétés suivantes :

1. Pour tous $(\pi, \pi') \in \mathfrak{P}$, $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 0$, où $u = \mathcal{B}^{-1}(\pi)$ et $u' = \mathcal{B}^{-1}(\pi')$,
2. Pour tous $(\pi, \pi') \in \mathfrak{P}'$, $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 1$, où $u = \mathcal{B}^{-1}(\pi)$ et $u' = \mathcal{B}^{-1}(\pi')$.

Ces conditions nous fournissent alors $\sigma_{i+1} = \sigma_i + \mathrm{Card}(\mathfrak{P}')$. Nous montrons en outre que $\mathrm{Card}(\mathfrak{P}') = (n-1)!$, ce qui conclut car $\mathcal{B}^{-1}$ réalise une bijection de $\mathfrak{S}_n$ vers G_n. Plus précisément :

Lemme 2.3. *Soient $i \in [n-1]$ et $u \in G_n$. On pose $\pi = \mathcal{B}(u)$ et $\pi' = (i, i+1)\pi$, autrement dit π' s'obtient en transposant $\pi(i)$ et $\pi(i+1)$. Soit finalement $u' = \mathcal{B}^{-1}(\pi')$. Alors :*

1. *Si $|\pi(i+1) - \pi(i)| \neq 1$, alors $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 0$,*
2. *Si $|\pi(i+1) - \pi(i)| = 1$, alors $u(i+1) + u'(i+1) - u(i) - u'(i) = 1$.*

Preuve.

1. Puisque $|\pi(i+1) - \pi(i)| = |\pi'(i+1) - \pi'(i)| \neq 1$, on a $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$ La proposition 1.5 montre donc que $u(i) = u'(i+1)$ ainsi que $u(i+1) = u'(i)$. Le résultat en découle.
2. Supposons d'abord que $\pi(i+1) - \pi(i) = 1$. Cela implique que $\pi(i) \notin \phi_\pi$, puis que $C_\pi(\pi(i)) = C_\pi(\pi(i+1))$ et enfin que $u(i+1) - u(i) = 1$, d'après la proposition 1.5.
   Supposons ensuite que $\pi(i) - \pi(i+1) = 1$. Cela implique que $\pi(i) \in \phi_\pi$, puis que $C_\pi(\pi(i)) = C_\pi(\pi(i+1)) + 1$ et enfin que $u(i+1) - u(i) = 0$, d'après la proposition 1.5.

□

Nous affirmons la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Soit i un entier entre 1 et $n-1$. Alors $\sigma_{i+1} = \sigma_i + (n-1)!$.*

Preuve. Nous explicitons les deux parties $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$. On pose :

$$\mathfrak{P} = \{ \quad \big(\pi, (i, i+1)\pi\big) \quad | \quad \pi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \pi(i) \leq \pi(i+1) - 2\},$$

$$\mathfrak{P}' = \{ \quad \big(\pi, (i, i+1)\pi\big) \quad | \quad \pi \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \pi(i) = \pi(i+1) - 1\}.$$

Le lemme 2.3 nous assure que cette partition possède la propriété voulue. Il nous reste donc à calculer $\mathrm{Card}(\mathfrak{P}')$.

Or se donner un élément de $\mathfrak{P}'$, c'est se donner un entier $\pi(i)$ entre 1 et $n-1$, qui impose une valeur à $\pi(i+1)$, et $n-2$ éléments restants, qui eux forment un élément de $\mathfrak{S}_{n-2}$. Par suite, $\mathrm{Card}(\mathfrak{P}') = (n-1)(n-2)! = (n-1)!$, ce qui achève la démonstration. □

Par exemple, dans le cas où $n = 4$ et $i = 3$, on pourra vérifier que :

$$\mathfrak{P} = \{(1324, 1342), (2314, 2341), (2413, 2431), (3124, 3142), (3214, 3241), (4213, 4231)\},$$

$$\mathfrak{P}' = \{(1234, 1243), (1423, 1432), (2134, 2143), (3412, 3421), (4123, 4132), (4312, 4321)\},$$

et voir qu'on a bien $\mathrm{Card}\, \mathfrak{P}' = (4-1)! = 6$.

La conjecture 2.2 devient alors un corollaire immédiat de la proposition 2.4.

2.2 Calcul de la somme totale des éléments et de σ_1

Posons $S = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$. Puisque la suite (σ_i) est arithmétique, il suffit de connaître S pour déterminer σ_1. Pour y parvenir, nous avons besoin de deux définitions et de quelques résultats intermédiaires.

Définition 2.5. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Une *descente* de π est un entier i vérifiant $\pi(i) > \pi(i+1)$. L'ensemble des descentes de π est noté $\mathrm{Des}(\pi)$. L'*indice majeur* de π, noté $\mathrm{maj}(\pi)$, est la somme de toutes les descentes de π.

Définition 2.6. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Une *inversion* de π est un couple (i, j) vérifiant $i < j$ et $\pi(i) > \pi(j)$. Le nombre total d'inversions de π est noté $\mathrm{inv}(\pi)$.

Lemme 2.7. *Il existe une bijection de G_n vers $\mathfrak{S}_n$ envoyant $u \in G_n$ sur $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que :*

$$\sum_{i=1}^{n} u(i) = \mathrm{inv}(\pi) + n.$$

Preuve. D'après [1], il existe une bijection[1] de G_n vers $\mathfrak{S}_n$ envoyant $u \in G_n$ sur $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} u(i) = \mathrm{maj}(\sigma) + n$. Or d'après [3, 4], il existe une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même[2] qui envoie σ sur π telle que $\mathrm{maj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\pi)$. Il suffit de composer ces deux bijections pour obtenir le résultat souhaité. □

Lemme 2.8. *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{inv}(\pi) = \frac{n(n-1)n!}{4}.$$

Preuve. Étant donné $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on note $\mathrm{r}(\pi)$ la permutation « retournée » de π, qui s'obtient en écrivant les éléments de π en sens inverse. Il est alors clair que $\mathrm{inv}(\pi) + \mathrm{inv}(\mathrm{r}(\pi)) = \frac{n(n-1)}{2}$. Comme r est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même :

$$2 \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{inv}(\pi) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \big(\mathrm{inv}(\pi) + \mathrm{inv}(\mathrm{r}(\pi))\big) = \frac{n(n-1)n!}{2},$$

et le résultat s'ensuit. □

[1] Cette bijection est en fait celle qui envoie u sur $\mathrm{r}\left(\mathcal{B}(u)^{-1}\right)$ où r est la bijection de « retournement » définie ultérieurement, voir [1].

[2] MacMahon a montré l'existence de cette bijection dans [3]. Celle-ci a effectivement été construite par Foata et Schützenberger dans [4].

Proposition 2.9. *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$S = \frac{n(n+3)n!}{4}.$$

Preuve. D'après les lemmes 2.7 et 2.8 :

$$S = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \big(\mathrm{inv}(\pi) + n\big) = \frac{n(n-1)n!}{4} + n\, n! = \frac{n(n+3)n!}{4}.$$

□

Connaissant S et la raison de la suite, il est immédiat de trouver que $\sigma_1 = \frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$. En conclusion, nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 2.10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [n]$. On pose $\sigma_i = \sum_{u \in G_n} u(i)$, où $u(i)$ est l'entier en i-ième position dans la bonne suite u. Alors, lorsque i varie de 1 à n, les σ_i forment une suite arithmétique de raison $(n-1)!$ et de terme initial $\frac{n^2+n+2}{4}(n-1)!$.*

Références

[1] I. Kortchemski, « Good Sequences, Bijections and Permutations », *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* **6** (2005). `http ://www.rose-hulman.edu/mathjournal/v6n2.php`

[2] B. Le Floch, Communication privée.

[3] P. A. MacMahon, « The indices of permutations, and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects », *Amer. J. Math.* **35** (1913), 281-322.

[4] D. Foata et M.-P. Schützenberger, « Major index and inversion number of permutations », *Math. Nach.* **83** (1978), 143-159.