TD8 – Formule du changement de variable – Corrigé

0 – Petite question

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Que dire de μ ?

2. On suppose maintenant que μ est finie et que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Que dire de μ ? Et si on ne suppose plus que la mesure μ est finie ?

Corrigé :

1. Si on prend $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on voit que

$$\mu(A) = \int_A g(x)dx.$$

Ainsi μ est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. On va montrer que la conclusion est la même. Si $a < b \in \mathbb{R}$, considérons $\phi_k(x) = (kd(x,]a,b[^c)) \wedge 1$, qui est une fonction lipschitzienne tendant simplement en croissant vers $\mathbb{1}_{]a,b[}$. Ainsi,

$$\int \phi_n(x)\mu(dx) = \int \phi_n(x)g(x)dx,$$

et d'après le théorème de convergence monotone, ceci implique

$$\mu(]a,b[) = \int_{]a,b[} g(x)dx.$$

En particulier, ceci impose que g est intégrable. En utilisant le lemme de la classe monotone, on conclut que

$$\mu(A) = \int_A g(x)dx$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

pour tout borélien $A \in \mathbb{R}$. Ainsi μ est encore la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si la mesure μ n'est pas fini mais finie sur tous les compacts (ce qui revient à fire que g est localement intégrable), il est aisé d'adapté le raisonnement précédent pour obtenir une conclusion identique.

En revanche, si on ne fait aucune hypothèse sur μ, le résultat tombe en défaut, comme le montre le contre-exemple suivant (dû à Omar Mohsen). On commence par construire une fonction positive mesurable g d'intégrale infinie (pour la mesure de Lebesgue) sur tout intervalle ouvert. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une énumération des rationnels, et considérons la fonction mesurable

$$h(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{x - r_n}} \mathbb{1}_{0<x-r_n<1}.$$

Posons $g = h^2$. On vérifie que h est intégrable, ce qui implique $h < \infty$ p.p. et donc $g < \infty$ p.p. En revanche, on vérifie que pour tous $a < b$:

$$\int_{]a,b[} g(x)dx = \infty.$$

Soit alors μ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, de sorte que pour tous $a < b$:

$$\infty = \mu(]a,b[) = \int_{]a,b[} g(x)dx. \tag{1}$$

Maintenant, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue bornée, écrivons f comme limite croissante de fonctions en escalier :

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \inf_{]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[} f \cdot \mathbb{1}_{]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[}.$$

Le théorème de convergence monotone et (1) fournissent

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Cependant il n'est pas vrai que $\mu(A) = \int_A g(x)dx$ pour tout borélien $A \in \mathbb{R}$. En effet :

$$1 = \mu(\{0\}) \neq \int_{\{0\}} g(x)dx = 0.$$

□

1 – Mesure image

Rappel (mesure image). Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $\phi : E \to F$ une fonction mesurable. On rappelle que l'on définit sur $(F, \mathcal{B})$ une mesure ν_ϕ appelée mesure image de μ par ϕ par

$$\nu_\phi(B) = \mu(\phi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

On rappelle que pour tout fonction mesurable $f : F \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_F f(x)\nu_\phi(dx) = \int_E f(\phi(x))\mu(dx).$$

Exercice 1. (**Formule des compléments**) On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x,y\geq 0\}}\, dx\, dy,$$

par l'application $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt.$$

Corrigé :

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On veut calculer

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy.$$

Soit $\phi : (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$, qui est un C^1-difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ de jacobien

$$\mathrm{Jac}(\phi)(x,y) = -\frac{1}{x+y}.$$

D'après la formule du changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \\
&\quad = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\left((x+y)\frac{x}{x+y}\right)^{a-1}\left((x+y)-(x+y)\frac{x}{x+y}\right)^{b-1}(x+y)e^{-(x+y)}(x+y)^{-1}\, dx\, dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} f(u,v)(uv)^{a-1}(u-uv)^{b-1} u e^{-u}\, du\, dv \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} f(u,v) e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1}(1-v)^{b-1}\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Donc la mesure image par $(x,y) \mapsto (x+y, x/(x+y))$ de la mesure $x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{\{x,y>0\}}\, dx\, dy$ est

$$e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1} \mathbb{1}_{\{u>0, 0<v<1\}}.$$

2. D'après le théorème de Fubini-Tonelli la masse totale de cette mesure est

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1}\, du\, dv = \Gamma(a+b) \int_0^1 d\, t^{a-1}(1-t)^{b-1}.$$

On trouve donc la formule des compléments. □

2 – Calculs de lois à densité

Exercice 2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de (X,Y) est
$$\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $U=\min(X,Y)$.
2. On suppose que la loi de (X,Y) est
$$\frac{1}{4\pi}e^{-x/2}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y))$.
3. On suppose que la loi de (X,Y) est
$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$
Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Corrigé :

1. Soit $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F(U)) &= \lambda\mu\int_{\mathbb{R}_+^2}F(\min(x,y))e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\mu\int_{\{0\leq x\leq y\}}F(x)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy+\lambda\mu\int_{\{0\leq y\leq x\}}F(y)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\int_0^\infty F(x)e^{-\lambda x}\left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}\,dy\right)dx+\mu\int_0^\infty F(x)e^{-\mu x}\left(\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy\right)dx\\
&= (\lambda+\mu)\int_0^\infty F(x)e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx.
\end{aligned}$$
La variable aléatoire U est donc exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$.
2. Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(F\Big(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y)\Big)\Big) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(\sqrt{x}\cos(y),\sqrt{x}\sin(y))e^{-x/2}\,dx\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(x\cos(y),x\sin(y))e^{-x^2/2}x\,dx\,dy,
\end{aligned}$$
d'après la formule du changement de variables utilisée avec le C^1-difféomorphisme suivant : $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]\mapsto(\sqrt{x},y)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]$. Puis d'après la formule du passage en coordonnées polaires, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(x\cos(y),x\sin(y))e^{-x^2/2}x\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}f(u,v)e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv.$$
La loi de $(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y))$ est donc $(2\pi)^{-1}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv$.
Remarque : les variables $\sqrt{X}\cos(Y)$ et $\sqrt{X}\sin(Y)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne. On a

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy.$$

Et $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto (x/y, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien y^{-1}. Donc d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) |y| e^{-\frac{y^2}{2}(\frac{x^2}{y^2}+1)} |y|^{-1}\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(u) |v| e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\, du\, dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(u) \left(\int_{\mathbb{R}} |v| e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\, dv \right) du \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} g(u) \frac{1}{u^2+1}\, du. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} g(u) \frac{1}{u^2+1}\, du,$$

ce qui signifie que la loi de X/Y est la loi de Cauchy, c'est-à-dire la loi de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. □

Exercice 3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}\, dx$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Corrigé : Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a par symétrie

$$\mathbb{E}(F(N^{-2})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}\, dx.$$

Et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-2} \in \mathbb{R}_+^*$ est un C^1 difféomorphisme de Jacobien $-2x^{-3}$ donc d'après la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}_+^*} F(u) e^{-1/(2u)} (2u^{3/2})^{-1}\, du.$$

Donc la loi de $1/N^2$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-1/(2u)} \mathbb{1}_{\{u>0\}}\, du$.

Exercice 4. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Corrigé : Le point d'impact du rayon lumineux sur l'axe des ordonnées est $Y = \tan(t)$. Or $\phi : t \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \tan(t) \in \mathbb{R}$ est un C^1-difféomorphisme de Jacobien $1 + \tan^2(t)$. Donc, pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a, d'après la formule du changement de variables,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\tan(t))\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) \frac{dy}{1+y^2}.$$

La variable aléatoire Y suit donc la loi de Cauchy. μ est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax|x\rangle}\lambda_d(dx),$$

où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ et λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Rappel : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Corrigé : La matrice A est symétrique définie positive donc il existe K une matrice symétrique définie positive telle que $A = K^2$. Soit $\phi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto Kx$. L'application ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ tel que $|\mathrm{Jac}(\phi)| = \det(K)$. On a donc d'après le théorème du changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax|x\rangle}\lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Kx|Kx\rangle}\lambda_d(dx) = (\det(K))^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\ldots+x_d^2)}dx_1\ldots dx_d.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\ldots+x_d^2)}dx_1\ldots dx_d = \prod_{1\le i\le d}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)$$

Or pour chaque $i \in \{1,\ldots,d\}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax|x\rangle}\lambda_d(dx) = \sqrt{\frac{\pi^d}{\det(A)}}.$$

□

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, on se donne $(X_1,\ldots,X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \ldots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_n$ sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telles que
$$Y_1(\omega) \le \ldots \le Y_n(\omega) \ \text{ et } \ \{Y_1(\omega),\ldots,Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)\}$$
pour presque tout $\omega \in \Omega$.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1,\ldots,Y_n)$ et $(Y_1/Y_2,\ldots,Y_{n-1}/Y_n)$.

Corrigé :

1. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. On peut définir pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_i(\omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X_{\sigma_i}(\omega) \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_1}(\omega)<\dots<X_{\sigma_n}(\omega)\}}.$$

En effet, la mesure de Lebesgue des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ où deux coordonnées sont égales est nulle. Ainsi, les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ sont bien définies.

2. Soit $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(Y_1,\dots,Y_n)) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \int_{\{0\le x_{\sigma_1}<\dots<x_{\sigma_n}\le 1\}} f(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n})\,dx_1\dots dx_n \\ &= n! \int_{\{0\le x_1<\dots<x_n\le 1\}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n.\end{aligned}$$

La loi de $(Y_1,\dots,Y_n)$ est donc

$$n!\,\mathbb{1}_{\{0\le x_1<\dots<x_n\le 1\}}\,dx_1\dots dx_n.$$

Soit maintenant $g :]0,1[^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_1}{Y_2},\dots,\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right) = n! \int_{\{0<x_1<\dots<x_n<1\}} g\left(\frac{x_1}{x_2},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) dx_1\dots dx_n.$$

Et $\phi : (x_1,\dots,x_n) \in \{0<x_1<\dots<x_n<1\} \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n},x_n\right) \in\,]0,1[^n$ est un C^1-difféomorphisme de jacobien égal à $(x_2\dots x_n)^{-1}$. Ainsi, d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_1}{Y_2},\dots,\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right) &= n! \int_{]0,1[^n} g(u_1,\dots,u_{n-1}) u_2 u_3^2 \dots u_{n-1}^{n-2} u_n^{n-1}\,du_1\dots du_n \\ &= (n-1)! \int_{]0,1[^{n-1}} g(u_1,\dots,u_{n-1}) u_2 u_3^2\dots u_{n-1}^{n-2}\,du_1\dots du_{n-1}.\end{aligned}$$

Donc la loi de $(Y_1/Y_2,\dots,Y_{n-1}/Y_n)$ est

$$(n-1)!\,u_2u_3^2\dots u_{n-1}^{n-2}\,\mathbb{1}_{]0,1[^{n-1}}(u_1,\dots,u_{n-1})\,du_1\dots du_{n-1}.$$

Remarque : les variables $Y_1/Y_2,\dots,Y_{n-1}/Y_n$ sont indépendantes, et chacune des variables Y_i/Y_{i+1} est de loi $iy^{i-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)dy$.

Fin