TD6 – Théorèmes de Fubini

1 – Petits calculs

0) Expliquer pourquoi il n'y a pas de faute d'orthographe dans le titre du TD6.

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$ et 0 si $x=y=0$.
Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 dy f(x,y)$ et $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^1 dx f(x,y)$. Diabolique, non ?

2) En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dx\,dy$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$.

3) En remarquant que $x^{-1}\sin(x)=\int_0^1\cos(xy)\,dy$, calculer pour tout $t>0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty}x^{-1}\sin(x)e^{-tx}\,dx.$$

2 – Théorèmes de Fubini

Exercice 1. **(Truc de ouf)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que

$$\text{pour } \lambda \text{ presque tout } y\in\mathbb{R},\qquad \lambda(\{x\in\mathbb{R};\, f(x)=y\})=0.$$

Exercice 2. **(Quelque chose d'utile)** Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathcal{A},\mu)$, on considère $f:(E,\mathcal{A},\mu)\to(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g \circ f \, d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\, dt.$$

   Indication: On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.

2. Montrer que $\displaystyle\int_E f \, d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{f \geq t\}) dt$.

3. On suppose que μ est finie et qu'il existe $p \geq 1$ et $c > 0$ tels que pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| > t\}) \leq ct^{-p}$. Montrer que $f \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in [1, p[$. A-t-on forcément $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$?

Exercice 3. **(Inégalité de Hardy)** Soient $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\varphi : (X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$, et F la fonction définie pour μ-p.t. $x \in X$ par $F(x) = \displaystyle\int_Y \varphi(x, y)\nu(dy)$.

1. Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \displaystyle\int_Y \|\varphi(., y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \nu(dy)$.

2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p \in]1, \infty[$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t) dt$ vérifie l'inégalité suivante (appelée inégalité de Hardy): $\|F\|_p \leq \displaystyle\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

3 – Convolution, transformée de Fourier

Exercice 4. **(Transformée de Fourier)** Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ on note sa transformée de Fourier $\hat{f}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt} dx$.

1. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Soient $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$.

3. En déduire que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution.

Exercice 5. **(Super Hölder)**

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

   Indication :
$$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$$

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$ l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

3 – À préparer pour la prochaine fois

Exercice 6. **(Spoiler: convolution inside)** Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, f = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. On définit une fonction $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ par

- $\mu(A) = 0$ si A est une partie finie ou dénombrable,
- $\mu(A) = +\infty$ sinon.

Soit K l'espace triadique de Cantor défini par $K = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$. On rappelle que K est un compact de $[0,1]$, infini non-dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle. On pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x - y \in K\}$.

1. Vérifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\, \mu(dy) \right) dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\, dx \right) \mu(dy)$. Conclure.

Exercice 8. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soient f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} fg\, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu$.

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x,y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 9. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$.

Pour l'exercice suivant on rappelle les deux théorèmes classiques :

- Théorème d'Ascoli : Soit X et Y deux espaces métriques compacts, et A une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues de $X \longrightarrow Y$ muni de la convergence uniforme. Alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ (*i.e.* sa fermeture est compacte) si elle est équi-continue *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\mathrm{d}_X(x,x') \leq \delta \Rightarrow \forall f \in A, \mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon).$$

- Pré-compacité : Soit (E,d) un espace métrique complet. Les parties $A \subset E$ relativement compactes sont exactement les parties pré-compactes *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists \text{ un recouvrement de } A \text{ par } n_\varepsilon \text{ parties de diamètre } \leq \varepsilon.$$

Pour $h > 0$ et une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle que $\tau_h f$ désigne l'application $\tau_h f(x) = f(x-h),\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. **(Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$.)** On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \leq p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.
   (a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.
   (b) Montrer que pour tout n assez grand, $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon$.
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.
2. Conclure.