TD5 – Espaces L^p

1 – Petites extractions

0) Donner un exemple de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1) Soient $p \geqslant 1$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f. Rappeler pourquoi il existe une extractrice ϕ et une fonction $h \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $(f_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge μ-p.p. vers f et $|f_{\phi(n)}| \leqslant h$ pour tout $n \geqslant 1$, μ-p.p.

Indication : Calquer la démonstration de la complétude des espaces $\mathbb{L}^p$.

2) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ-p.p.

3) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty[$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$ et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$.

2 – Espaces L^p

Exercice 1. **(Continuité de l'opérateur de translation)**
Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par

$$\tau_h f(x) = f(x - h), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$

$$\lim_{|h|\to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p}\|f\|_p.$$

   Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.

3. Que deviennent les résultats de la question (2.) si $p = \infty$?

4. ✯ – Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

Rappel (**Théorème d'Egoroff**). Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite fonctions qui converge μ-p.p. vers f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que la suite f_n converge uniformément vers f sur $E \setminus A_\varepsilon$.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.

2. Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.

3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 3. **(Lemme de Scheffé)** Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante:

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||f_n||_p = ||f||_p.$$

Indication: considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du théorème de convergence dominée.

Exercice 4. **(Théorème de Lusin)** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\epsilon \subset [a, b]$ tel que $\lambda([a, b] \cap K_\varepsilon^c) \leqslant \varepsilon$ et f soit continue sur K_ϵ.

Indication: on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses dans $L^1([a, b])$.

3 – Théorème de Radon-Nikodym

Exercice 5. **(Contre-Exemple à R-N)** Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Exercice 6. **(Quantification de l'absolue continuité)** Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leqslant \eta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leqslant \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie. Que se passe-t-il si ν est infinie?

Exercice 7. **(Le retour du diable)** On construit récursivement une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ comme suit. On pose $f_0(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$. On construit f_{n+1} à partir de f_n en remplaçant f_n, sur chaque intervalle maximal $[u, v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction linéaire par morceaux qui vaut $(f_n(u) + f_n(v))/2$ sur $\left[\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}, \frac{2v}{3} + \frac{u}{3}\right]$.

1. Verifier que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \geqslant 0$ et $x \in [0, 1]$. En déduire que f_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction continue notée $f_{\mathtt{diable}}$.
2. Soit $\mu_{\mathtt{diable}}$ la mesure sur $[0, 1]$ définie comme étant la mesure de Stieljes associée à $f_{\mathtt{diable}}$. Montrer que $\mu_{\mathtt{diable}}$ est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue. La mesure $\mu_{\mathtt{diable}}$ a-t-elle des atomes?

4 – À préparer pour la prochaine fois

Exercice 8. Soient $r, s \in [1, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que:
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |g(y)| \leqslant c|y|^{r/s}. \tag{1}$$
Soit Φ l'application de $\mathbb{L}^r(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$ définie par $\Phi(f) = g \circ f$.

1. Vérifier que $\Phi(f) \in \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2. Montrer que Φ est continue.

   Indication: on pourra utiliser le critère séquentiel de la continuité, et utiliser la question 1) des petites extractions du début du TD.

3. Que se passe-t-il si la condition (1) n'est plus satisfaite?

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 9.

1. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1, +\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 10. – Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Fin