TD3 – Intégration, théorèmes de convergence – Corrigé

0 – Exercice ayant été voué à être préparé

Exercice 1 (Mesure image).
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : E \to F$ une fonction mesurable. On rappelle que l'on définit sur $(F, \mathcal{B})$ une mesure ν_f appelée mesure image de μ par f par

$$\nu_f(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Soit $\phi : F \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_F \phi(x)\nu_f(dx) = \int_E \phi(f(x))\mu(dx).$$

Corrigé : Par définition la formule que l'on cherche à obtenir est vérifiée pour les fonctions indicatrices et par linéarité, pour les fonctions étagée (positives). Soit $\phi : F \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées positives $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ telle que ϕ_n tende en croissant vers ϕ. On a alors pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_F \phi_n(x)\nu_f(dx) = \int_E \phi_n(f(x))\mu(dx)$$

En utilisant le théorème de convergence monotone on montre que l'égalité est vérifiée pour ϕ. $\square$

1 – Petites questions

1) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, avec $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout n, qui converge simplement vers 0. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

Réponse : C'est une application immédiate du théorème de convergence dominée. $\square$

2) On définit sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. On suppose que

$$\sup_{n\geqslant 0} \int_E |f_n|\, d\mu < \infty.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Montrer que f est intégrable.

Réponse : Il suffit d'utiliser le lemme de Fatou : comme $|f(x)| = \lim |f_n(x)|$ presque partout :

$$\int |f| d\mu = \int \liminf |f_n| d\mu \leqslant \liminf \left(\int |f_n| \right),$$

et cette dernière quantité est finie puisqu'elle est plus petite que $\sup_n \int |f_n| d\mu$. □

3) (Inégalité de Markov) Soit $f \in \mathscr{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $A > 0$,

$$\mu(\{|f| \geqslant A\}) \leqslant \frac{1}{A} \int_E |f| d\mu.$$

Réponse : Il suffit d'écrire :

$$\int_E |f| d\mu \geqslant \int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f| \geqslant A\}} d\mu \geqslant \int_E A \mathbb{1}_{\{|f| \geqslant A\}} d\mu = A\mu(\{|f| \geqslant A\}).$$

□

4) Soit $f \in \mathscr{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$. Que dire de la réciproque ?

Réponse : D'après l'inégalité de Markov,

$$\mu(\{|f| \geqslant n\}) \leqslant \frac{1}{n} \int |f| d\mu \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

On a d'autre part $\mu(\{f = +\infty\}) \leqslant \mu(\{|f| = +\infty\}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\{|f| \geqslant n\})$ (en effet, les ensembles $\{|f| \geqslant n\}$ sont décroissants en n, d'intersection égale à $\{|f| = +\infty\}$ et ils sont de mesure finie d'après l'inégalité de Markov). La réciproque est clairement fausse (prendre la fonction constante égale à 1 sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. □

2 – Intégration, théorèmes de convergence

Exercice 2.

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée f' bornée. Prouver que

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

2) $(\star)$ Trouver une fonction continue* presque partout dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$ et $\int_0^1 f'(x) dx = 0$.

*Il manquait cette hypothèse dans l'énoncé initial. Sans cette hypothèse, c'est facile : prendre la fonction qui est nulle sur $[0, 1[$ et qui vaut 1 en 1.

Corrigé :

1) On définit sur $[0,1]$ la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ par $g_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x))$ si $x \leqslant 1-1/n$ et 0 sinon. Pour $x \in [0,1[$ fixé, $g_n(x)$ converge vers $f'(x)$. Soit $M = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, qui est fini par hypothèse. D'après le théorème des accroissements finis, $|g_n(x)| \leqslant M$ pour tout $x \leqslant 1-1/n$, et cette inégalité est clairement vraie pour $x \in [1-1/n, 1]$. Ainsi, $|g_n(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 f'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx.$$

Mais, en notant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,

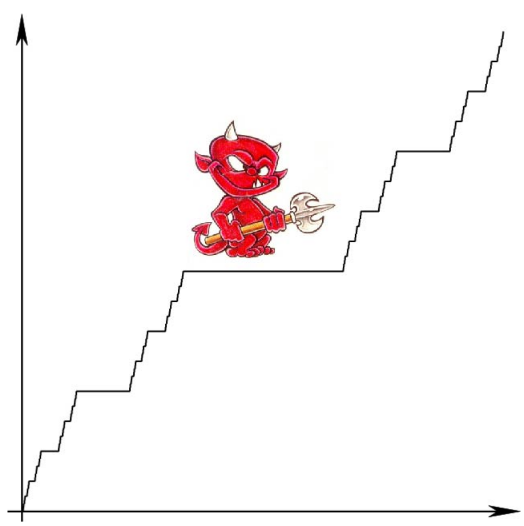
$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_n(x)dx. &= n\int_0^{1-1/n} f(x+1/n)dx - n\int_0^{1-1/n} f(x)dx \\
&= n\int_{1/n}^{1} f(x)dx - n\int_0^{1-1/n} f(x)dx \\
&= n(F(1) - F(1-1/n)) - n(F(1/n) - F(0)),
\end{aligned}$$

qui converge vers $f(1) - f(0)$ lorsque $n \to \infty$. En effet, la continuité de f en 0 et 1 implique $F'(0) = f(0)$ et $F'(1) = f(1)$. Le résultat s'ensuit.

Remarques :

- Soit $G(t) = \int_0^t f'(u)du$. En écrivant $(G(t+\epsilon - G(t))/\epsilon = \int_0^1 f'(t+\epsilon u)du$, on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée pour dire que cette quantité converge vers $f'(t)$ lorsque $\epsilon \to 0$. En effet, on a aucune hypothèse sur la continuité de f'.
- Il a été objecté en TD qu'on ne sait pas *a priori* que $F(x)$ est dérivable de dérivée f, car il n'a pas encore été vu que l'intégrale de Riemann et de Lebesgue coincident pour les fonctions continues. Ce n'est pas trop grave : on peut montrer ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée en suivant la méthode de la première remarque.

2) Un exemple, l'escalier du diable :



Il s'agit d'une application continue croissante f telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, de dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble de Cantor K_3 vu au TD 1. Ainsi, $f' = 0$ presque partout ! Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor pour la construction. □

Exercice 3 (Borel-Cantelli is back)**.** Soient $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Indication donnée à titre indicatif : on pourra considérer, pour $\eta > 0$, les ensembles

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\},\ n \geqslant 1.$$

Corrigé : Pour $\eta > 0$ et $n \geqslant 1$, on a

$$A_{\eta,n} = \frac{1}{n}\{y \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(y)| > \eta\}.$$

D'après l'inégalité de Markov, la mesure de $A_{n,\eta}$ est majorée par

$$\lambda(A_{\eta,n}) = \frac{1}{n}\lambda\left(\{y \in \mathbb{R} : |f(y)| > \eta n^{\alpha}\}\right) \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{\eta n^{\alpha}}\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda.$$

Ainsi, la série de terme général $\lambda(A_{n,\eta})$ est sommable. D'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\lambda\left(\limsup_{n} A_{\eta,n}\right) = 0.$$

On a donc montré que, pour tout $\eta > 0$, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) \leqslant \eta$. Ainsi, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) \leqslant 1/p$ ce qui signifie que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$. □

Rappel : Il a été vu en TD qu'une union quelconque d'ensembles de mesure nulle n'est pas forcément de mesure nulle (penser à $\mathbb{R}$ qui est l'union des singletons) et qu'on ne peut pas intervertir « pour tout » et « pour presque tout ».

Exercice 4 (Uniforme continuité de l'intégrale)**.**
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu = 0.$$

2) Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

3) Si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, que peut-on dire de la fonction $F : u \to \int_{[0,u]} f d\lambda$?

Corrigé :

1) La fonction f étant intégrable, elle est finie μ-p.p et donc $\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \to 0$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. Ainsi, $|f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \to 0$ μ-p.p. quand $n \to \infty$ et d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_E |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}}\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_E |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}}\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\delta_\varepsilon = \varepsilon/(2n_\varepsilon)$. Alors, pour $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) < \delta_\varepsilon$,

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\leqslant n_\varepsilon\}} |f| d\mu \leqslant \int_E |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu + n_\varepsilon \mu(A) < \varepsilon.$$

3) Montrons que F est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

En particulier, si $0 \leqslant y - x < \delta$ alors

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_{[x,y]} f d\lambda\right| \leqslant \int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon.$$

$\square$

Exercice 5 (Problème : convergence en mesure)**.**
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f - f_n| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
2. Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une suite de (f_n) qui converge μ-p.p. vers f.
4. *Un théorème de convergence dominée plus fort.* On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p. pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $|f| \leqslant g$ μ-p.p.
   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

5. *L'espace* $\mathbf{L}^0(E,\mu)$. On note $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.
   (a) Montrer que l'on définit une distance sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ par
   $$\delta(f,g)=\inf\{\varepsilon>0, \mu(|f-g|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon\}$$
   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.
   (b) Montrer que $(\mathbf{L}^0(E,\mu),\delta)$ est complet.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Corrigé :

1. On suppose que $\int_E |f_n-f|\,d\mu\to 0$. Soit $\varepsilon>0$. D'après l'inégalité de Markov,
$$\mu(|f_n-f|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_E|f_n-f|\,d\mu,$$
ce qui implique que $\mu(|f_n-f|>\varepsilon)\to 0$. Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant1}$ définie sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ par
$$f_n=n\mathbb{1}_{[0,1/n]}.$$
Alors $(f_n)_{n\geqslant1}$ converge en mesure vers 0. En effet pour tout $n\geqslant1$, $\lambda(f_n>0)=1/n$. En revanche, pour tout $n\geqslant1$, $\int_{[0,1]}f_n(x)\,dx=1$.
2. On suppose que $f_n\to f$ μ-p.p. Soit $\varepsilon>0$. Alors,
$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant1}\bigcup_{m\geqslant n}\{|f_m-f|>\varepsilon\}\right)=0.$$
Or, la suite $(\cup_{m\geqslant n}\{|f_m-f|>\varepsilon\})_{n\geqslant0}$ est décroissante pour l'inclusion et μ est une mesure finie, donc on a,
$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{m\geqslant n}\{|f_m-f|>\varepsilon\}\right)=0.$$
En particulier, $\lim_{n\to\infty}\mu(\{|f_n-f|>\varepsilon\})=0$. Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_{n,k})_{n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant n}$ définie sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ par
$$f_{n,k}=\mathbb{1}_{[(k-1)/n,k/n]}.$$
Alors $(f_{n,k})_{n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant n}$ converge en mesure vers 0. En effet pour tout $n\geqslant1$ et tout $1\leqslant k\leqslant n$, $\lambda(f_{n,k}>0)=1/n$. En revanche $\limsup f_{n,k}=\mathbb{1}_{[0,1]}$, donc la convergence n'a pas lieu μ-p.p.
3. On peut construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant1}$ telle que pour tout $k\geqslant1$,
$$\mu\left(|f_{n_k}-f|>\frac{1}{k}\right)\leqslant 2^{-k}.$$
Alors, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour μ-presque tout x, il existe $k_0(x)$ tel que pour tout $k\geqslant k_0(x)$, $|f_{n_k}(x)-f(x)|\leqslant 1/k$. Cela implique que $f_{n_k}\to f$ μ-p.p. quand $k\to\infty$.

4. <u>Première méthode : par l'absurde</u>. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geqslant 0}$ telle que pour tout $k \geqslant 0$,
$$\int_E |f_{n_k} - f| \, d\mu \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$
Or $f_{n_k} \to f$ en mesure quand $k \to \infty$ donc d'après la question 3., on peut extraire une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{j\geqslant 0}$ de (f_{n_k}) telle que $f_{n_{k_j}} \to f$ μ-p.p. Or $|f_{n_{k_j}}| \leqslant g$ pour tout $j \geqslant 0$. Donc d'après le théorème de convergence dominée,
$$\int_E \left|f_{n_{k_j}} - f\right| \, d\mu \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Cela contredit l'inégalité (1).
<u>Deuxième méthode</u>. Comme suggéré dans l'énoncé.
   (a) Vérifions tout d'abord que $|f| \leqslant g$ μ-p.p. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\mu(|f| > g + \varepsilon) \leqslant \mu(|f| > |f_n| + \varepsilon) \leqslant \mu(|f - f_n| > \varepsilon).$$
   Donc, $\mu(|f| > g + \varepsilon) = 0$. Ainsi, μ-p.p., pour tout $n \geqslant 1$, $|f| \leqslant g + 1/n$ et donc $|f| \leqslant g$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. On a
$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f| \, d\mu &= \int_{\{|f_n - f|\leqslant\varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu + \int_{\{|f_n-f|>\varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu \\ &\leqslant \varepsilon\mu(E) + 2\int_{\{|f_n-f|>\varepsilon\}} |g| \, d\mu\end{aligned}$$
   La fonction g étant intégrable, on a d'après la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale,
$$2\int_{\{|f_n-f|>\varepsilon\}} |g| \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Ainsi, $\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(E)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0$.

(5)(a) Montrons que δ est une distance sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$. Soient $f, g \in \mathbb{L}^0(E, \mu)$. Il est évident que $\delta(f, f) = 0$ et $\delta(f, g) = \delta(g, f)$. Supposons $\delta(f, g) = 0$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $\mu(|f - g| > 1/n) \leqslant 1/n$ et la suite $(\{|f - g| > 1/n\})_{n\geqslant 1}$ est croissante pour l'inclusion donc on a
$$\mu(f \neq g) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1}\{|f - g| > 1/n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(|f - g| > 1/n) = 0,$$
i.e. $f = g$ μ-p.p. Soient maintenant $f, g, h \in \mathbb{L}^0(E, \mu)$. Posons $a = \delta(f, g)$ et $b = \delta(g, h)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\begin{aligned}\mu(|f - h| > a + b + 2\varepsilon) &\leqslant \mu(|f - g| + |g - h| > a + b + 2\varepsilon) \\ &\leqslant \mu(|f - g| > a + \varepsilon) + \mu(|g - h| > b + \varepsilon) \\ &\leqslant a + b + 2\varepsilon.\end{aligned}$$
Cela implique $\delta(f, h) \leqslant \delta(f, g) + \delta(g, h)$. Vérifions que δ métrise la convergence en mesure. Soient $f \in \mathbb{L}^0(E, \mu)$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{L}^0(E, \mu)$. On suppose tout d'abord que

$f_n \to f$ en mesure. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Ainsi, $\delta(f_n, f) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$ ce qui montre que $\delta(f_n, f) \to 0$. Supposons maintenant que $\delta(f_n, f) \to 0$. Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $\varepsilon \in]0, \eta]$, il existe n_0 tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mu(|f_n - f| > \eta) \leqslant \mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que $f_n \to f$ en mesure.

(5)(b) On peut construire une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $\mu(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}) \leqslant 2^{-k}$ pour tout $k \geqslant 1$ (s'en convaincre, c'est important). Notons

$$A_k = \left\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\right\}.$$

Alors $\sum_{k\geqslant 1} \mu(A_k) < \infty$. Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mu(\limsup_k A_k) = 0$. Ainsi, la série

$$\sum_{k\geqslant 1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

converge pour μ-presque tout x. Donc la suite $(f_{n_k}(x))_{k\geqslant 1}$ converge pour μ-presque tout x. On note f sa limite μ-p.p. (on pose $f = 0$ sur l'ensemble de mesure nulle où f n'est pas définie, noter que f est bien définie μ-p.p.). Alors d'après la question 1., $f_{n_k} \to f$ en mesure. Ainsi $\delta(f_{n_k}, f) \to 0$ et donc $\delta(f_n, f) \to 0$.

(5)(c) Supposons qu'il existe une distance d sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p. D'après la question 1., on peut construire une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge en mesure vers 0 mais pas μ-p.p. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geqslant 0}$ telle que $d(f_{n_k}, 0) \geqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 0$. Or $f_{n_k} \to 0$ en mesure. Donc, d'après la question 2., on peut construire une suite extraite $(f_{n_{k_j}})_{j\geqslant 0}$ qui converge μ-p.p. vers 0. Cela contredit l'inégalité $d(f_{n_{k_j}}, 0) \geqslant \varepsilon$ pour tout $j \geqslant 0$. □

Exercice 6.
Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite

$$\left(\int_0^1 f(x^n)dx\right)_{n\geqslant 1} ?$$

Corrigé : La fonction f étant monotone, elle admet une limite à droite en 0 que nous noterons α ($\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

1. Premier cas : la fonction f est décroissante et $\alpha < \infty$. Alors la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$f_n(x) = f(x^n), \ x \in]0, 1[,$$

est croissante et converge λ-p.p. vers α. Donc d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{]0,1[} \alpha \, d\lambda = \alpha.$$

2. Deuxième cas : la fonction f est décroissante et $\alpha = \infty$. Alors $(f_n)_{n \geqslant 1} \uparrow +\infty$ λ-p.p. donc d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Troisième cas : la fonction f est croissante (on a $\alpha < \infty$ dans ce cas). Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et converge λ-p.p. vers α. De plus $f_1 = f$ est intégrable donc

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

$\square$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que :

$$f \in \mathscr{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n \geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\}) < \infty.$$

Que se passe-t-il si la masse totale est infinie ?

Corrigé : On a

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\, \mu &= \sum_{n \geqslant 0} \int_E |f| \mathbb{1}_{\{n \leqslant |f| < n+1\}} d\mu \\
&\leqslant \sum_{n \geqslant 0} (n+1) \mu(\{n \leqslant |f| < n+1\}) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (n+1)(\mu(\{|f| \geqslant n\}) - \mu(\{|f| \geqslant n+1\}) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \mu(\{|f| \geqslant n\}) + \sum_{n \geqslant 0} n\mu(\{|f| \geqslant n\}) - \sum_{n \geqslant 0} (n+1)\mu(\{|f| \geqslant n+1\}) \\
&= \mu(E) + \sum_{n \geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\}).
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\mu(\{|f| \geqslant 0\}) = \mu(E)$. On montre de la même manière que

$$\int_E |f|\, d\mu \geqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\}).$$

On obtient l'équivalence demandée.

Dans le cas où $\mu(E) = \infty$, on peut avoir $\sum_{n \geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\}) < \infty$ avec f non intégrable. Considérer par exemple $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. $\square$

Exercice 8 (Quand est-ce que convergence p.p. implique convergence dans $\mathscr{L}_1$?)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite **uniformément intégrable** si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geqslant c\}} |f_i| d\mu = 0. \tag{2}$$

a) Montrer que toute famille finie de $\mathscr{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$ (noté $\mathscr{L}_1(\mu)$ dans la suite) est uniformément intégrable.

b) Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

   (i) $\sup_{i\in I} \int |f_i| d\mu < \infty$

   (ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) < \eta \Longrightarrow \forall\, i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon.$

c) Montrer que si les familles $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i + g_i)_{i\in I}$.

d) Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, $f \in \mathscr{L}_1(\mu)$ et

$$\int_E |f_n - f|\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ébauche de corrigé :

a) Si I est fini, il suffit de montrer que $\lim_{c\to\infty} \int_{\{|f_i|\geqslant c\}} |f_i| d\mu = 0$ pour $i \in I$ fixé. Ceci découle du théorème de convergence dominée, car

$$\int_{\{|f_i|\geqslant c\}} |f_i| d\mu = \int_E |f_i| \mathbb{1}_{\{|f_i|\geqslant c\}} d\mu,$$

et $|f_i|\mathbb{1}_{\{|f_i|\geqslant c\}}$ converge μ-p.p. vers 0 lorsque $c \to \infty$ en étant majoré par $|f_i|$, qui est intégrable.

b) Montrons d'abord l'implication. On remarque que pour $i \in I$ et $c \geqslant 0$,

$$\int_E |f| d\mu \leqslant c\mu(E) + \int_{\{|f_i|\geqslant c\}} |f| d\mu.$$

D'après (2), il existe $C > 0$ tel que $\sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geqslant C\}} |f_i| d\mu < \infty$. On a alors

$$\sup_{i\in I} \int |f_i| d\mu \leqslant C\mu(E) + \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geqslant C\}} |f_i| d\mu < \infty,$$

ce qui prouve (i).

Pour (ii), on imite la preuve de l'uniforme continuité de l'intégrale : on fixe $\epsilon > 0$ et on choisit $C > 0$ tel que $\sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geqslant C\}} |f_i| d\mu < \epsilon/2$. Si $\mu(A) \leqslant \epsilon/(2C\mu(E))$, on a pour tout $i \in I$:

$$\int_A |f_i| d\mu \leqslant \int_{A, |f_i|\leqslant C} |f_i| d\mu + \int_{|f_i|\geqslant C} |f_i| d\mu \leqslant \mu(A) C\mu(E) + \int_{|f_i|\geqslant C} |f_i| d\mu \leqslant \epsilon.$$

Montrons maintenant la réciproque. Notons $\gamma = \sup_{i \in I} \int |f_i| d\mu < \infty$. D'après l'inégalité de Markov, pour $i \in I$ et $c \geqslant 0$ on a $\mu(\{|f_i| \geqslant c\}) \leqslant \gamma/c$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que la condition (ii) soit vérifiée. Pour $c \geqslant \gamma/\eta$ on a alors , $\mu(\{|f_i| \geqslant c\}) \leqslant \eta$ pour tout $i \in I$, ce qui implique

$$\sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| \geqslant c\}} |f_i| d\mu \leqslant \epsilon$$

grâce à (ii). Le résultat s'ensuit.

c) C'est une conséquence facile de la question b) en utilisant l'inégalité triangulaire.

d) Montrons d'abord l'implication. En écrivant $|f| \leqslant |f_n| + |f - f_n|$, on voit aisément que $f \in \mathscr{L}_1(\mu)$. Soit $\epsilon > 0$. On écrit, pour $c \geqslant 0$:

$$\int_E |f_n - f| d\mu \leqslant \int_X \min(|f_n - f|, c) d\mu + \int_{\{|f_n - f| \geqslant c\}} |f_n - f| d\mu.$$

D'après a), f est uniformément intégrable, et donc d'après c) la suite $(f_n - f)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{\{|f_n - f| \geqslant C\}} |f_n - f| d\mu \leqslant \epsilon.$$

On a donc

$$\int_E |f_n - f| d\mu \leqslant \int_X \min(|f_n - f|, C) d\mu + \epsilon.$$

Mais le premier terme de la quantité de droite tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée. On a donc $\int_E |f_n - f| d\mu \leqslant 2\epsilon$ pour n suffisamment grand, ce qui prouve l'implication désirée.

Montrons finalement la réciproque. La condition $\int_E |f_n - f|\, d\mu \to 0$ garantit que la suite $(f_n - f)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable. Nous avons déjà vu que f est uniformément intégrable. Il s'ensuit que la suite $(f_n - f + f)_{n \geqslant 1} = (f_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable, ce qui conclut l'exercice.

□

Exercice 9 ($\star$). Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable telle que

$$\int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f|\, d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$, μ presque partout.

Corrigé : Montrons d'abord que $|f| \leqslant 2$ μ-p.p. À cet effet, on remarque que d'après l'inégalité triangulaire $\{|f| > 2\} \subset \{|\mathbb{1}_{A_n} - f| > 1\}$, donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mu(\{|f| > 2\}) \leqslant \int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\mu(\{|f| > 2\}) = 0$, ce qui prouve que $|f| \leqslant 2$ μ-p.p.

Pour prouver que $f = \mathbb{1}_A$, μ-p.p, nous allons démontrer que $f = f^2 \ \mu - \text{p.p.}$ (et alors $A = \{f = 1\}$). À cet effet, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_E |f - f^2| d\mu &\leqslant \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu + \int_E |f^2 - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu \\
&= \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu + \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| \cdot |f + \mathbb{1}_{A_n}| d\mu \\
&\leqslant 4 \int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu,
\end{aligned}$$

car $|\mathbb{1}_{A_n} - f| \leqslant 3$ μ-p.p. Ainsi, on obtient le résultat. □

Fin