TD (20)13 – Lois des grands nombres, théorème central limite.

Corrigé

1 – Lois des grands nombres

Exercice 1. (**Calculer en cent leçons**) Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p\in[0,1]$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda>0$.

Corrigé :

1. On a
$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n=\mathbb{E}\left(f\left(\frac{U_1+\ldots+U_n}{n}\right)\right)$$
où $U_1,\ldots,U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(U_1+\ldots+U_n)$ converge p.s. et donc en loi vers $1/2$. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} dx_1,\ldots dx_n\, f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. On a
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)=\mathbb{E}\left(f\left(\frac{B_1+\ldots+B_n}{n}\right)\right),$$
où $B_1,\ldots,B_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p indépendantes. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(B_1+\ldots+B_n)$ converge p.s. et donc en loi vers p. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)=f(p).$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. On a
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{P_1+\ldots+P_n}{n}\right)\right),$$
où $P_1,\ldots,P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre λ indépendantes. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(P_1+\ldots+P_n)$ converge p.s. et donc en loi vers λ. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda).$$

Remarque : on a utilisé les résultats suivants que vous pourrez vérifier à titre d'exercice :

1. La somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ *indépendantes* suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. La moyenne d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est λ.
3. Soient $n \geq 1$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n > 0$ et $X_1,\ldots,X_n$ n variables aléatoires *indépendantes*, chaque X_i suivant une loi de Poisson de paramètre λ_i. Alors $X_1+\ldots+X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$.

□

Exercice 2. (Une loi faible avec fonctions caractéristiques) Soit $X_1,..,X_n,...$ une suite de v.a.i.i.d définies sur un espace probabilisé. On suppose que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Montrer alors (sans utiliser la loi forte des grands nombres) à l'aide des fonctions caractéristiques que
$$\frac{X_1+...+X_n}{n} \xrightarrow{(\mathrm{P})} \mathbb{E}[X_1].$$

Corrigé :
L'indépendance des (X_i) implique que pour $\xi \in \mathbb{R}$:
$$\varphi_{\frac{X_1+...X_n}{n}}(\xi) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n.$$
Comme X_1 a un moment d'ordre 1 fini, $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ est dérivable en 0 de dérivée $i\mathbb{E}[X_1]$. D'où
$$\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n = \left((1+\frac{i\xi\mathbb{E}[X_1]}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longmapsto i\xi\mathbb{E}[X_1].$$
Ainsi, les fonctions caractéristiques de $\frac{X_1+...+X_n}{n}$ convergent simplement vers la fonction caractéristique de la mesure de Dirac en $\mathbb{E}[X_1]$, on en déduit que
$$\frac{X_1+...+X_n}{n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathbb{E}[X_1].$$
Or la convergence en loi vers une constante implique une convergence en probabilité vers cette constante, ce qui conclut. □

Exercice 3. (**Théorème de Bernstein-Weierstrass**) Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Le n-ième polynôme de Bernstein de f, B_n, est défini par
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $S_n(x)$ la variable aléatoire étant définie par $S_n(x) = \mathrm{Bin}(n,x)/n$, où $\mathrm{Bin}(n,x)$ est une variable aléatoire. de loi binomiale de paramètre n et x. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x))]$.
2. En déduire le Théorème de Berstein-Weierstrass

$$\|B_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corrigé :

1. C'est évident.
2. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ le module d'uniforme continuité de f associé à ε. Alors on a

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n(x))|] \\ &\leq \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n(x))|\mathbf{1}_{|S_n(x)-x|\leq\eta}] + \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n(x))|\mathbf{1}_{|S_n(x)-x|\geq\eta}] \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}[|S_n(x) - x| \geq \eta] \end{aligned}$$

Pour évaluer $\mathbb{P}[|S_n(x) - x| \geq \eta]$, on utilise l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}[|S_n(x) - x| \geq \eta] \leq \frac{\mathrm{Var}[|S_n(x)|]}{\eta^2} = \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{2n\eta^2}.$$

La majoration ci-dessus est uniforme en x, ce qui permet de conclure. □

Exercice 4. (**Loi faible, non forte**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi

$$\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2\ln(n+1)n}(\delta_n + \delta_{-n}) + \left(1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\right)\delta_0.$$

1. Montrer que $Y_n := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que presque sûrement, Y_n ne converge pas.

Corrigé :

1. On montre (en calculant) que

$$\mathbb{E}[(Y_n)^2] \longrightarrow 0.$$

L'inégalité de Markov permet alors de conclure.

2. À l'aide de Borel-Cantelli, on montre que $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq 1, \text{ pour une infinité de } n\right) = 1$, et l'on conclue comme dans l'exercice 5.2) du TD 11. □

2 – Théorème central limite

Exercice 5. (**Un dernier calcul et on s'en va**) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Corrigé : On a

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n),$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre 1 indépendantes. Et

$$\mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$

- La variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ étant égale à λ, on a d'après le TCL,

$$\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} N,$$

où N est une variable gaussienne (centrée réduite). Or la fonction de répartition de N est continue donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

□

Exercice 6. (**Convergence en loi mais pas en proba**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout $A > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1,$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right) = 1.$$

2. Justifier que si $(S_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite extraite de $(S_n)_{n\geq 1}$, alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} = +\infty\right) = 1.$$

3. En déduire que la suite $(n^{-1/2} S_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Corrigé :

1. D'après le TCL, la suite $(n^{-1/2} S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire N de loi gaussienne centrée réduite. Soit $A > 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) \geq \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right\}\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right).$$

La variable N étant à densité, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right) = \mathbb{P}(N > A) > 0,$$

ce qui implique que $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) > 0$. Or

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right\} \in \mathcal{A}_\infty,$$

où $\mathcal{A}_\infty$ est la tribu asymptotique $\bigcap_{n\geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1.$$

En considérant une suite $(A_k)_{k\geq 1} \uparrow +\infty$, on en déduit le résultat.

2. On démontre ce résultat de la même manière que le résultat précédent.
3. Si la suite $(n^{-1/2}S_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors on peut extraire une sous-suite $({n_k}^{-1/2}S_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que ${n_k}^{-1/2}S_{n_k} \to X$ p.s. Or X a la même loi que N, ce qui contredit le fait que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} = +\infty\right) = 1.$$

□

3 – Vecteurs gaussiens

Exercice 7. (**Personne n'est jamais assez fort pour ce calcul**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes et indentiquement distribuées. Étudier le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$$

dans les cas suivants :

1. X_1 est de loi $\frac{1}{2}\delta_{(-1,-1)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,1)}$,
2. X_1 est de loi $\frac{1}{2}\delta_{(-1,-1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,-1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,1)}$.

Corrigé :

1. Dans ce cas, X_1 est centré et la matrice de covariance de X_1 est $C_{X_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, d'après le TCL vectoriel, la suite $((X_1+\ldots+X_n)/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire N de loi $\mathcal{N}(0, C_{X_1})$. Le vecteur N est un vecteur gaussien dégénéré, il a la même loi que le vecteur (v,v) où la variable aléatoire réelle v est de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Dans ce cas, on a $\mathbb{E}(X_1) = (0, 1/2)$ et la matrice de covariance de X_1 est $C_{X_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$. Donc, d'après le TCL vectoriel, la suite $((X_1 + \ldots + X_n - n\mathbb{E}(X_1))/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire N de loi $\mathcal{N}(0, C_{X_1})$. Le vecteur N est un vecteur gaussien non-dégénéré dont la densité est

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\left(\frac{3}{4}y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2\right)\right).$$

□

Exercice 8. (**Suite récurrente aléatoire**) Soient $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ par $X_1 = U_1$ et $X_k = \theta U_{k-1} + U_k$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien non dégénéré dont on précisera la densité, l'espérance et la matrice de covariance.

Corrigé :

Soit A la matrice carré d'ordre n définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \theta & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \theta & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ldots & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on voit que $X = AU$ en notant $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $U = (U_1, \dots, U_n)$. Donc X est un vecteur gaussien. De plus $\det(A) = 1$ donc X est non dégénéré. On a $\mathbb{E}(X) = 0$ et la matrice de covariance de X est donnée par

$$C_X = A(\sigma^2 I_n)\,{}^t\!A = \sigma^2 A\,{}^t\!A = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \theta & & & \\ \theta & 1+\theta^2 & \theta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \theta & 1+\theta^2 & \theta \\ & & & \theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Enfin la densité de X est $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-{}^t x C_X^{-1} x} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-{}^t x C_X^{-1} x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$ □

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 9. (**Formule de Stirling**)

Question préliminaire : Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a : $\mathbb{E}(|X - \inf(X,a)|) \leq (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geq a))^{1/2}$.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

On note $x^- = \sup(-x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $n \geq 1$, vérifier que S_n suit la loi de Poisson de paramètre n, calculer $\mathbb{E}(Y_n^2)$ et en déduire que pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}.$$
2. Soit Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la suite $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y^-.
3. Montrer à l'aide de la question préliminaire que
$$\mathbb{E}(Y_n^-) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Y^-).$$
4. En déduire la formule de Stirling
$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Corrigé :

1. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\mathbb{E}(|X - \inf(X,a)|) = \mathbb{E}\left((X-a)\mathbb{1}_{\{X>a\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X>a\}}\right) \leq (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X>a))^{1/2}.$$

(2) (a) On a
$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_n) = 1.$$

On en déduit que
$$\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}((Y_n^-)^2) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{a^2}.$$

(2) (b) D'après le TCL, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y. Or la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^-$ est continue donc la suite $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y^-.

(2) (c) Soit $a > 0$. La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \inf(x, a)$ est continue et bornée donc

$$\mathbb{E}(\inf(Y_n^-, a)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\inf(Y^-, a)).$$

Et

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(Y^-)| \\
&\quad \leq \quad \mathbb{E}(|Y_n^- - \inf(Y_n^-, a)|) + |\mathbb{E}(\inf(Y_n^-, a) - \inf(Y^-, a))| + \mathbb{E}(|\inf(Y^-, a) - Y^-|) \\
&\quad \leq \quad |\mathbb{E}(\inf(Y_n^-, a) - \inf(Y^-, a))| + (\mathbb{P}(Y_n^- \geq a))^{1/2} + (\mathbb{P}(Y^- \geq a))^{1/2},
\end{aligned}$$

d'après la question préliminaire. Or $\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq a^{-2}$ et

$$\mathbb{P}(Y^- \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}((Y^-)^2)}{a^2} \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Ainsi,

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(Y^-)| \leq \frac{2}{a}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(Y^-)| = 0.$$

(2) (d) La variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson de paramètre n donc

$$\mathbb{E}(Y_n^-) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (n-k) e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} \right) = \frac{n^{n+1}}{e^n n! \sqrt{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}.$$

Et

$$\mathbb{E}(Y^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Donc,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

et donc

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

□

Exercice 10. (**Une LGN avec un goût de TCL**) On rappelle que la loi de Cauchy à pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, et pour fonction caractéristique

$$\phi(\xi) = \exp(-|\xi|).$$

1. Si X et Y sont deux variables de Cauchy indépendantes. Quelles est la loi de $\frac{X+Y}{2}$?
2. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vaiid de loi de Cauchy. Quelle est la loi de

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} ?$$

Qu'en pensez-vous ?

3. Retrouver la forme de la fonction caractéristique à partir de la densité de la loi de Cauchy.

Corrigé :

1. On calcule :
$$\phi_{(X+Y)/2}(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X+Y}{2}\cdot it\right)\right] = \mathbb{E}\left[e^{iX\frac{t}{2}}\right]\mathbb{E}\left[e^{iY\frac{t}{2}}\right] = \exp(-|t|/2)\exp(-|t|/2) = \exp(-|t|).$$
On en déduit que $(X+Y)/2$ suit une loi de Cauchy.
2. Le même raisonnement montre que $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ suit une loi de Cauchy. On peut faire deux remarques :
   (i) Z_n ne converge pas p.s. lorsque $n \to \infty$. Ceci ne contredit pas la loi forte des grands nombres carte X_1 n'a pas de moment d'ordre 1.
   (ii) Le théorème central limite ne s'applique pas car il n'y a pas de moment d'ordre 1 (et donc pas de moment d'ordre 2).
3. On utilise la formule d'inversion de Fourier (voir les petites questions du TD 9 pour deux questions similaires).

□

Exercice 11. (**Équation aléatoire** –) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie σ^2. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ est de même loi que X et Y. Que dire de cette loi commune ?

Corrigé : Tout d'abord, comme $(X+Y)/\sqrt{2}$ et X ont même loi, on a $(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])/\sqrt{2} = \sqrt{2}\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$. D'où $\mathbb{E}[X] = 0$.
Ensuite, si $(X_i), (X_i'), (Y_i), (Y_i')$ sont des variables aléatoires indépendants de même loi que X, on démontre aisément par récurrence sur n que
$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{2^{n-1}}(X_i + X_i' + Y_i + Y_i')}{\sqrt{2^{n+1}}}$$
a la même loi que X. Or d'après le théorème central limite, Z_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (en effet, le numérateur de Z_n est une somme de 2^{n+1} variables aléatoires réelles centrées indépendantes de même loi et de variance σ^2). On conclut donc que X a la même loi que $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

□

Fin