TD 12 – Convergence de variables aléatoires – Corrigé

Exercice du TD 11 à préparer

Exercice 0. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.
2. On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.
3. Montrer que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Corrigé :

1. Soit $a \geq 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'évènement $\{\limsup X_n/\ln(n) > a\}$ est imbriqué entre deux limsup d'évènements :

$$\limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq (a-\varepsilon)\ln(n)\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) > a\} \subset \limsup_{n\to\infty}\{X_n > a\ln(n)\}.$$

$$\mathbb{P}[X_n \geq a\ln(n)] = \frac{1}{n^a},$$

et les évènements sont indépendants, donc d'après Borel-Cantelli en prenant des ε apropriés

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln(n)} > a\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases},$$

donc $\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} = 1$ p.s.

2. Soit $\epsilon \in (0,1)$ et posons $A_n = \{Z_n \leq 1-\epsilon\}$. Montrer que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X_i \leq (1-\epsilon)\ln(n) \text{ pour } 1 \leq i \leq n) = \mathbb{P}(X_1 \leq (1-\epsilon)\ln(n))^n = \left(1 - e^{-(1-\epsilon)\ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \leq \exp\left(-n\cdot\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right) \leq \exp(-n^{\epsilon}).\end{aligned}$$

Donc $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand on a $Z_n \geq 1-\epsilon$, ce qui conclut.

3. Posons $B_n = \{Z_n \geq 1+\epsilon\}$. Un calcul proche de celui de la question précédente donne :

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)^n \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{n^{\epsilon}}.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

La série de terme général $1/n^\epsilon$ ne converge pas, il faut donc ruser un peu. Fixons $\eta > 0$ et posons $n_k = (1+\eta)^k$. Alors $\sum_k P(B_{n_k})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $Z_{n_k} \leq 1+\epsilon$. On encadre ensuite $n \geq 1$: $(1+\eta)^k \leq n \leq (1+\eta)^{k+1}$ et on écrit :

$$Z_n = \frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\ldots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\ldots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n_{k+1})}\frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} = Z_{n_{k+1}} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Il s'ensuit que $\limsup_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Compte tenu de la question 2, il en découle que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s. □

0 – Petites questions

Vrai ou faux ?

1. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en loi. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en loi pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité et μ une mesure positive. Alors il y a convergence étroite des μ_n vers μ si et seulement si, pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence
$$\int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu.$$
3. Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

1. Vrai : si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue bornée, alors $g \circ f$ est continue bornée et donc $\mathbb{E}[g(f(X_n))] \to \mathbb{E}[g(f(X))]$.
2. L'implication est vraie (elle implique que μ est une mesure de probabilité, et on conclut par une propriété du cours), mais la réciproque est fausse (prendre $\mu_n = \delta_n$).
3. Faux : on prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$ et $X_n(t)$ la fonction tente telle que $X_n(0) = 0, X_n(1/n) = n, X_n(2/n) = 0$. Alors X_n converge p.s. vers 0 mais $\mathbb{E}[X_n] = 1 \neq \mathbb{E}[0]$.

   Un autre exemple davantage probabiliste : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On note $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et soit $T = \inf n \geq 1; Z_n = 1$. On pose finalement :
$$W_n = Z_{\min(n,T)}.$$
   Ainsi, (W_n) est la marche aléatoire issue de 0 qui fait des sauts ± 1 qui reste en 1 une fois qu'elle l'a atteint. Il est possible de vérifier que $T < \infty$ p.s. de sorte que (W_n) converge presque sûrement vers 1. Or il est facile de vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[W_n] = 0$, de sorte que $\mathbb{E}[W_n]$ ne converge pas vers $\mathbb{E}[1]$. Avec le langage du second semestre, cela fournit l'exemple d'une martingale qui converge p.s. mais pas dans $\mathbb{L}^1$.

Quels sont les liens entre ces différentes convergences : en loi, presque sûre, en probabilité, $\mathbb{L}^1$, $\mathbb{L}^p$ pour $p > 1$?

Corrigé :

- Convergence *p.s.* implique convergence en probabilité qui implique convergence en loi.
- Convergence $\mathbb{L}^p$ pour $p \geq 1$ implique convergence en probabilité.

- Convergence $\mathbb{L}^q$ implique convergence $\mathbb{L}^p$ pour $q > p$.

Il est très fortement recommandé de trouver des contre-exemples pour les réciproques qui ne sont pas vraies en général. On a cependant les réciproques "partielles" suivantes :

- Convergence en probabilité implique la possibilité d'extraire une sous-suite qui converge p.s.
- En redéfinissant les variables sur un même espace de probabilité, il est possible de transformer convergence en loi vers converge p.s., c'est le théorème de représentation de Skorokhod vu en cours pour les variables réelles (**Attention :** c'est un résultat très subtil).
- Convergence p.s. avec équiintégrabilité implique convergence L^1 (voir Exercice 6).

□

1 – Convergences en loi

Exercice 1. (**Lemme de Slutsky**) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. **Lemme de Slutsky** On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Corrigé :

1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\Phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') \to \Phi_{(X,Y)}(t,t')$ pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. Et l'on a par indépendance,
$$\Phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') = \Phi_{X_n}(t)\Phi_{Y_n}(t') \to \Phi_X(t)\Phi_Y(t') = \Phi_{(X,Y)}(t,t').$$
2. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec Z gaussienne centrée. La variable Z étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est continue), c'est à dire $2Z = 0$ en loi, ce qui n'est pas.
3. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) \to \mathbb{E}(F(X, Y))$ pour une fonction F continue à support compact. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. On a alors $Y_n \to a$ en probabilité (résultat important à savoir prouver). Et
$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X,a))| \\ \leq \;& |\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n,a))| + |\mathbb{E}(F(X_n,a)) - \mathbb{E}(F(X,a))|. \end{aligned}$$
La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x,a)$ est continue et bornée donc $|\mathbb{E}(F(X_n,a)) - \mathbb{E}(F(X,a))| \to 0$. De plus, la fonction F est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver δ tel que $|F(x,y) - F(x',y')| \leq \varepsilon$ pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$. Alors, en notant M un majorant de F, on a
$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n,a))| \\ \leq \;& \mathbb{E}(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|) \\ \leq \;& \mathbb{E}(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n-a|\geq\delta\}}) + \mathbb{E}(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n-a|<\delta\}}) \\ \leq \;& 2M\mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \delta) + \varepsilon. \end{aligned}$$
Ainsi, $\limsup |\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n,a))| \leq \varepsilon$ et ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit que $|\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n,a))| \to 0$, puis le résultat. □

Exercice 2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi μ. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. On suppose que μ est la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et expliciter la loi limite.
2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard c'est-à-dire que $\mu(dx) = (\pi(1+x^2))^{-1}dx$. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite. Rappel : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $n(1-M_n)$ est à valeurs dans $[0,n]$. On a donc, pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(n(1-M_n) \leq t) = 0$. Soit $t \geq 0$ fixé. Pour tout $n \geq t$, on a
$$\mathbb{P}(n(1-M_n) \leq t) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$
Donc $\mathbb{P}(n(1-M_n) \leq t) \to (1-e^{-t})\mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$, et la fonction $t \mapsto (1-e^{-t})\mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.
2. Soit $t \leq 0$. On a
$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n},$$
donc $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit maintenant $t > 0$. On a
$$\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) = \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0).$$
D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0) \to 0$. Et
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t, M_n > 0\right) &= \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) \\ &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{n}} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right), \end{aligned}$$
car $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to \infty$. Ainsi, la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$. □

2 – Convergences en probabilité

Exercice 3. (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit
$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$
le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \dots, X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. En déduire que $T_n/(n \log n) \to 1$ en probabilité.

Corrigé :

1. On a $\tau_1^n = 1$. Soit $(t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \dots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)$. En posant $t_1 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \dots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{k=1}^{n-1} \Big\{ X_{t_1 + \ldots + t_k} = \sigma(k), X_{t_1+\ldots+t_k+1} \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}, \dots, \\
&\qquad\qquad X_{t_1+\ldots+t_k+t_{k+1}-1} \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \Big\} \cap \{X_{t_1+\ldots+t_n} = \sigma(n)\} \Bigg) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} \\
&= \frac{n!}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1}
\end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et ont respectivement pour loi

$$\sum_{i \geq 1} \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{i-1} \delta_i.$$

Cette loi est la loi de $G_k + 1$ où G_k suit la loi géométrique de paramètre $(k-1)/n$.

2. On a $T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$\mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1},$$

où H_n est la série harmonique et

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)/n}{((n+1-k)/n)^2} \leq Cn^2.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n)) \leq \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{\varepsilon^2 n^2 \log(n)^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \log(n)^2}.$$

Donc $(T_n - \mathbb{E}(T_n))/(n \log(n)) \to 0$ en probabilité. Or $\mathbb{E}(T_n) \sim n \log(n)$ quand $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \geq 2\varepsilon n \log(n)\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n)\}$ pour n assez grand. On obtient ainsi le résultat. □

Exercice 4.

1. Montrer qu'une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge ps vers X.
2. Montrer que si une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Corrigé :

1. L'implication est claire, car d'après un résultat du cours on peut extraire une sous-suite convergeante p.s. vers X pour toute suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers X.

   Pour la réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\epsilon > 0$ et une extractrice ϕ telle que $\mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| < \epsilon) > \epsilon$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe une extractice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge en probabilité vers X quand $n \to \infty$. Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}(|X_{\phi(\psi(n))} - X| < \epsilon) > \epsilon$ pour tout $n \geq 1$.
2. D'après la première question, il suffit de montrer que si ϕ est une extractrice, il existe une extractrice ψ telle que $f(X_{\phi(\psi(n))})$ converge p.s. vers $f(X)$. D'après la première question, il existe une extractrice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge p.s. vers X. La conclusion en découle par continuité de f.

□

Exercice 5.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Corrigé :
La faņon la plus rapide de faire cette exercice est d'utiliser ce qu'on connait déjà : d'après Radon-Nikodym on peut trouver une fonction f mesurable positive qui vérifie

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ \ \mathbb{Q}(A) = \int f \mathbb{1}_A d\mathbb{P},$$

et de plus $\int f d\mathbb{P} = 1 < \infty$, donc f est intégrable. Ensuite, par l'absolue continuité de l'intégrale,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall A \in \mathcal{A}, \ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) < \varepsilon.$$

Et enfin, soit $\eta > 0$, pour n assez grand $\mathbb{P}[|X_n - X| > \eta] < \delta$, donc pour n assez grand $\mathbb{Q}[|X_n - X| > \eta] < \varepsilon$. □

3 – Convergences $\mathbb{L}^p$

Exercice 6. (**Uniforme intégrabilité**)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) est uniformément intégrable (ou equiintégraable ou u.i.) si

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] = 0.$$

1. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est dominée par une v.a. Y intégrable, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. alors
$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty,$$
mais que la réciproque est fausse.

3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$

Montrer que la réciproque est vraie à condition de supposer $\sup \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.

4. Soit $p > 1$, montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$ (*ie* $\sup \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$), alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
5. On suppose que $X_n \to X$ p.s.
   (a) On suppose que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
   (b) Réciproquement, on suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
      i. Montrer que X est intégrable.
      ii. Montrer que la suite $(X_n - X)_{n\geq 1}$ est u.i.
      iii. En déduire que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$.

Corrigé :
Ceci est biensûr réminscent de l'exercice 8 du TD 3.

1. Pour tout n, $|X_n| \leq Y$, donc pour tout n

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] \leq \mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|>M\}}] \to 0$$

par convergence dominée.

2. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. alors $\lim_{M\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] = 0$, on peut ainsi trouver M_0 tel qu'on ait $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M_0\}}] = K_0 < \infty$. On a alors

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] \geq K_0 + M_0 < \infty.$$

Pour un contre-exemple à la réciproque, il suffit de prendre des approximations de la mesure de dirac, ou en terme de v.a. $\mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$, comme (X_n) est u.i., on peut trouver M_1 tel que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M_1\}}] < \varepsilon/2$. Ensuite, si $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_n|>M_1\}}] + \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_n|\leq M_1\}}] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M_1\mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Donc avec $\delta = \frac{\varepsilon}{2M_1}$ on a le résultat souhaité. Pour la réciproque, si $M > \frac{\sup \mathbb{E}[|X_n|]}{\delta}$, alors par l'inégalité Markov $\mathbb{P}[X_n > M] < \delta$ et par l'hypothèse

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] < \varepsilon \quad \forall n \geq 1\ \forall M > \frac{\sup \mathbb{E}[|X_n|]}{\delta}.$$

4. On suppose que $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$, et on va essayer d'appliquer le critère précédent. Par Hölder ou Jensen $E[|X_n|] \leq \|X_n\|_p$, donc la première hypothèse est vérifiée. Maintenant par Hölder :

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] \leq \|X_n\|_p \mathbb{P}(A)^{1/q},$$

avec $q < \infty$ puisqu'on a pris $p > 1$, et avec $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\sup \|X_n\|_p}\right)^q$ on a la relation voulue.

5. On suppose que $X_n \to X$ p.s.

(a) On suppose que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$, on va à nouveau utiliser le critère de la question 3. Comme $\mathbb{E}[|X_n|] \to \mathbb{E}[|X|]$, la suite est bornée et on a la première hypothèse. Prenons $\varepsilon > 0$, et soit $N > 0$ tq $\forall n > N$, $\mathbb{E}[|X_n - X|] < \varepsilon/2$. On peut trouver δ_1 et δ_2 tels que

$$\mathbb{P}(A) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \max_{1 \le i \le N} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_A] < \varepsilon,$$
$$\mathbb{P}(A) < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite si $n > N$, on a

$$\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] \le \mathbb{E}[|X_n - X|] + \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] \le \varepsilon.$$

(b) Réciproquement, on suppose que $(X_n)_{n \ge 1}$ est u.i.

i. Par Fatou,

$$\mathbb{E}[|X|] \le \liminf \mathbb{E}[|X_n|] \le \sup \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$$

ii. On utilise à nouveau le critère de la question 3., mais je n'ai pas envie de le faire une troisième fois.

iii. Soit $\varepsilon > 0$ et $M_2 > 0$ tel que $\sup_{n \ge 1} \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > M_2\}}] < \varepsilon$. La suite de v.a. $|X_n - X| \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \le M_2\}}$ converge vers 0 p.s. et est dominée par M_2, donc par convergence dominée

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > M_2\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \le M_2\}}] \le \varepsilon + o(1),$$

ce qui achève la démonstration. □

3 – À faire pendant les vacances

1. Manger beaucoup de magret de canard.
2. Pour préparer l'examen, réviser le cours et ce qui a été fait en TD. Chercher des exercices examens des années précédents (les énoncés sont disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7.

1. Soit m une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \ge 1$, on définit une mesure de probabilité m_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$m_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m([k/n, (k+1)/n[) \delta_{k/n}.$$

Montrer que $(m_n, n \ge 1)$ converge étroitement vers m.

2. En déduire que si $(X_n)_{n \ge 1}$ est une suite de variables aléatoires, chaque X_n étant de loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n \ge 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Corrigé :

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi m. Alors on voit que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $Y_n = \lfloor nX \rfloor / n$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) suit la loi m_n. Et $Y_n \to X$ p.s. Donc $Y_n \to X$ en loi, ce qui signifie que $m_n \to m$ étroitement.
2. On pose $m(dx) = e^{-x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}\, dx$. Alors on vérifie que pour tout $n \geq 1$, m_n est la loi de la variable aléatoire X_n/n. En effet,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-k/n} - e^{-(k+1)/n} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x}\, dx = m_n(\{k/n\}).$$

□

Exercice 8. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Corrigé :
Si $x_n \to x$ et si X est de loi δ_x alors pour toute fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}(g(X_n)) = g(x_n) \to g(x) = \mathbb{E}(g(X))$, ce qui signifie que $X_n \to X$ en loi.

Si $X_n \to X$ en loi alors $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ pour tout $t \in D$ où D est l'ensemble des points de continuité de F (D est dense car le complémentaire d'un ensemble dénombrable). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(t) \in \{0, 1\}$ et donc $F_X(t) \in \{0, 1\}$ pour tout $t \in D$. Comme F_X est croissante, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x. Soit O un ouvert contenant x. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O) = 1.$$

Ainsi $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) = 1$ ce qui signifie que $x_n \in O$ à partir d'un certain rang. On a donc bien $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. □

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace (pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E, d)).

Corrigé :
On énumère $\Omega = \{\omega_i\}_{i\geq 1}$. Soit X et (X_n) des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que

$$X_n \xrightarrow{(P)} X.$$

Pour montrer que X_n converge p.s. vers X, il suffit de montrer que pour tout $k > 1$

$$\mathbb{P}(\{\omega, \limsup_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) = 0.$$

Soit $\omega_i \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$. D'après la convergence en probabilité de X_n vers X, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $\omega_i \notin \{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}$. On en déduit que pour tout ω_i de probabilité strictement positive, $\limsup d(X_n(\omega_i), X(\omega_i)) \leq 1/k$. La dénombrabilité de Ω permet de conclure.
□

Exercice 10. (✯) Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $N(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ convergent vers respectivement m et σ, et identifier la loi limite.

Corrigé :

On rappelle que la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2 est $\Phi_{m,\sigma^2}(t) = \exp(imt - \sigma^2 t^2/2)$. La réciproque découle ainsi immédiatement du théorème de Lévy (petite remarque : lorsque $\sigma = 0$, la gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est par convention constante égale à m).

Pour l'implication, supposons que Y_n converge en loi vers Y. Le théorème de Lévy garantit que $\exp(im_n t - \sigma_n^2 t^2/2)$ converge pour tout réel t lorsque $n \to \infty$, et donc que $\exp(-\sigma_n^2 t^2/2)$ converge (en prenant le module). Il s'ensuit que σ_n^2 converge vers $\sigma^2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Or $|\mathbb{E}[\exp(itY_n)]|$ converge vers $|\mathbb{E}[\exp(itY)]|$ qui est une fonction continue en t, ce qui exclut le cas $\sigma^2 = \infty$ (car alors $|\mathbb{E}[\exp(itY_n)]| \to \mathbb{1}_{t=0}$).

Il s'ensuit que $\exp(im_n t)$ converge pour tout réel t lorsque $n \to \infty$. Montrons que cela entraîne la convergence de la suite (m_n). Si on sait a priori que la suite (m_n) est bornée, c'est facile : si m et m' sont deux valeurs d'adhérence on a $\exp(imt) = \exp(im't)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $m = m'$. Supposons la suite (m_n) non bornée et montrons qu'on arrive à une contradiction. On extrait une sous-suite (m_{n_k}) qui converge vers $+\infty$ (on fait le même raisonnement pour $-\infty$). Alors pour tout $A > 0$, d'après le théorème de Portmanteau :

$$\mathbb{P}(Y \geq A) \geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}(Y_{n_k} \geq A) \geq 1/2$$

puisque pour k suffisamment grand on a $\mathbb{P}(Y_{n_k} \geq A) \geq \mathbb{P}(Y_{n_k} \geq m_{n_k}) = 1/2$. La contradiction souhaitée arrive en faisant tendre $A \to \infty$. □

Exercice 11. (✯✯) D'où vient le nom "Théorème de portmanteau" ?

Corrigé :

"Portmanteau" veut dire grosse valise en anglais. Le "Théorème de portmanteau" a été nommé ainsi en raison des nombreuses équivalences présentes dans son énoncé : ce n'est pas un "mot-valise" mais un "theorème-valise".

□

Fin