

## TD 10 – Indépendance



## 0 – Petite question

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes. Soit  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction borélienne. Montrer que  $\mathbb{E}[F(X, Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$ , où  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $g(y) = \mathbb{E}[F(X, y)]$  pour  $y \in \mathbb{R}$ .

## 1 – Variables aléatoires indépendantes

**Exercice 1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires gaussiennes (centrées réduites) indépendantes. Montrer que les variables aléatoires  $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$  soient indépendantes.

**Exercice 2.** On définit sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  des variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$  indépendantes et de loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, p\}$ .

1. Trouver la loi de  $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} U_k$ .
2. Montrer que

$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}.$$

**Exercice 3. (Formule de compensation.)** Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi  $\mu$  et  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendante de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$ .

1. On suppose que  $\mu$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$  c'est-à-dire que

$$\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0,$$

et que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On pose

$$P = \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{et} \quad F = N - P = \sum_{i=1}^N (1 - X_i),$$

avec  $P = F = 0$  sur  $\{N = 0\}$ . Les variables aléatoires  $P$  et  $F$  représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre  $p$  à  $N$  lancers.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à [igor.kortchemski@ens.fr](mailto:igor.kortchemski@ens.fr), ou bien à venir me voir au bureau V4.

- (a) Déterminer la loi du couple  $(P, N)$ .  
 (b) En déduire les lois de  $P$  et  $F$  et montrer que  $P$  et  $F$  sont indépendantes.
2. On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N f(X_i)\right) = \mathbb{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx),$$

avec  $\sum_{i=1}^N f(X_i) = 0$  sur  $\{N = 0\}$ .



## 2 – Indépendance et fonctions caractéristiques



*Exercice 4.* Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires bornées. Démontrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^k Y^l] = \mathbb{E}[X^k] \mathbb{E}[Y^l]. \quad (1)$$

*Indication.* Lire le titre de cette partie.



## 3 – À chercher pour la prochaine fois



*Exercice 5.* Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

- Si deux tribus  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont indépendantes et ont un élément commun  $A$ , montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- Soit  $\mathcal{C}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  telle que si  $C \in \mathcal{C}$ , alors  $\mathbb{P}(C) = 0$  ou  $\mathbb{P}(C) = 1$ . Montrer que si  $X$  est  $\mathcal{C}$  mesurable, alors  $X$  est constante presque sûrement.

*Indication :* on pourra introduire la fonction de répartition  $F$  de  $X$  et considérer  $x_0 = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\}$ .

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne. On suppose que  $f(X)$  et  $X$  sont indépendantes. Montrer que  $f(X)$  est constante presque sûrement.



## 4 – Compléments (hors TD)



*Exercice 6.*

- Mathias a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
- Mathilde a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?



**Exercice 7. (Processus de Poisson)** Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $T_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$T_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Pour tout  $t \geq 0$ , on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

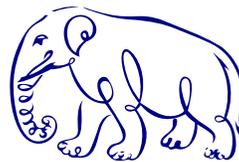
1. Soit  $n \geq 1$ . Calculer la loi du  $n$ -uplet  $(T_1, \dots, T_n)$ .
2. En déduire la loi de  $N_t$  pour tout  $t > 0$ .
3. Pour  $n \geq 1$  et  $t > 0$ , on définit sur  $\Omega$  une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{n,t}$  par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Calculer la loi du  $n$ -uplet  $(T_1, \dots, T_n)$  sous la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{n,t}$ .



**Exercice 8. (☆☆)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que les variables aléatoires  $X + Y$  et  $X - Y$  soient indépendantes. Montrer que les deux variables  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires gaussiennes.



*Fin*