Intégration et probabilités

TD1 – Espaces mesurés

2012-2013

1 – Petites questions

1) Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu?
2) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu?
3) Si on note λ la mesure de Lebesgue, on sait que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc:

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0.$$

o_O! Où est le problème ??

2 – Tribus, mesures

Exercice 1 (Préliminaires)**.** Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{k \geqslant n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{k \geqslant n} a_k\right).$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Vérifier les assertions suivantes :
   - $\limsup_{n \to \infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \geqslant 0, \forall k \geqslant n, a_k < \alpha.$
   - $\exists n \geqslant 0, \forall k \geqslant n, a_k < \alpha \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} a_n \leqslant \alpha.$
   - $\limsup_{n \to \infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \geqslant 0, \exists k \geqslant n, a_k > \alpha.$
   - $\forall n \geqslant 0, \exists k \geqslant n, a_k > \alpha \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} a_n \geqslant \alpha.$

   Écrire des assertions similaires faisant intervenir $\liminf_{n \to \infty} a_n$.
3. Vérifier que a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = l$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 2 ($\liminf$ et $\limsup$ de suites d'ensembles mesurables).

1. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

   (a) Que représentent les ensembles suivants,
   $$\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k\ ,\quad \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\ ?$$
   Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$, $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geqslant 1$.

   (b) Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ lorsque $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

   On suppose dans les questions (b) et (c) que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

   (c) Montrer que
   $$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)\ ,$$
   et que si $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) < \infty$, alors
   $$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)\ .$$
   Qu'est-ce qui se passe si $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \infty$?

   (d) (Lemme de Borel-Cantelli.) On suppose que $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que
   $$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

2. (Une application du lemme de Borel-Cantelli.) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que
   $$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$
   $i.e.$ presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$".

Exercice 3 (Opérations sur les tribus).

- Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.

- Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
- On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geqslant 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

  Indication: On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.
- (Partiel 2010) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Michel dit: alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-il raison?

Exercice 4 (Mesure sur $\mathbb{Z}$)**.** Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue)
$$\lambda(O_\epsilon) \leqslant \epsilon.$$
2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:
$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geqslant \lambda(A) - \epsilon.$$

Exercice 6 (Ensembles de Cantor)**.**
Soit $(d_n, n \geqslant 0)$ une suite d'éléments de $]0, 1[$, et soit $K_0 = [0, 1]$. On définit une suite $(K_n, n \geqslant 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n \geqslant 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.
3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que
$$K_3 = \left\{ \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{3^n} \ ; \ (a_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$
   et qu'il est mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 7. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3 – À préparer pour la prochaine fois

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$ constitué d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables par intersections finies et que pour tous $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{A})$ et $V \in \sigma(\mathcal{B})$ on a:

$$\mu(U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V).$$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 9 ("Cardinal" d'une tribu)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathcal{A}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par,

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} \,:\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de la dernière question de l'exercice 4.

Exercice 10 (Support)**.** Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \mu(B(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)

Exercice 11 ($\star$ – Mesure atomique)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = t$).

Exercice 12 (Un problème d'additivité)**.**
On note $l^\infty = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, ||\mathbf{a}||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(l^\infty, ||.||_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

   On admet (théorème de Hahn-Banach) qu'il existe une forme linéaire $F : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui satisfait les deux propriétés suivantes : Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$

   - $F(\mathbf{a}) \leqslant ||\mathbf{a}||_\infty$,
   - Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ existe alors $F(\mathbf{a}) = \alpha$.

2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $\mathbf{1}_A \in l^\infty$ définie par $\begin{cases} \mathbf{1}_A(n) = 1, \text{ si } n \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Si $P(A) = F(\mathbf{1}_A)$, montrer que

   - $P(\varnothing) = 0, P(\mathbb{N}) = 1$,
   - $P(A^c) = 1 - P(A)$,
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$.

3. Montrer que P n'est pas une mesure.

Exercice 13 ($\star$)**.** Est-ce que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ pour tous espaces métriques X, Y?

Fin