Partiel : remarques et barème.

Chaque question, à l'exception des questions (A2) et (B1), rapportait un bonus de +0,5 points si elle été parfaitement traitée.

Commentaire général. Évitez les mots de type *trivialement*, *clairement* en leur préférant une petite justification (même rapide) :

Ce qui se conçoit clairement s'énonce aisément.

Exercice I (*2,5 points*). Il fallait faire attention à quelques petits pièges malicieux et diaboliques :

- Il ne fallait pas écrire $\int h_n^+ d\mu \to \int h^+ d\mu$ sans justification. En effet, dire que $\int h_n^+ d\mu \to \int h^+ d\mu$ et $\int h_n^- d\mu \to \int h^- d\mu$ revient à dire que $h_n \to h$ dans $\mathbb{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, ce qui est (en général) plus fort que $\int h_n d\mu \to \int h d\mu$. Rappelons cependant que si $h_n \geq 0$, alors d'après le lemme de Scheffé, les assertions $\int h_n d\mu \to \int h d\mu$ et $h_n \to h$ dans $\mathbb{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ sont équivalentes. Dans notre cas h_n n'était pas forcément positive.
- Avant d'écrire $\int g d\mu$ il fallait s'assurer que $g \in \mathbb{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Si g était positive, on rappelle que $\int g d\mu$ aurait toujours un sens, mais ici g est de signe quelconque.
- Il ne fallait pas écrire une inégalité du type
$$\liminf_{n\to\infty}\left(\int g_n d\mu + \int f_n d\mu\right) \leq \liminf_{n\to\infty}\int g_n d\mu + \liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu$$
mais une égalité de type
$$\liminf_{n\to\infty}\left(\int g_n d\mu + \int f_n d\mu\right) = \liminf_{n\to\infty}\int g_n d\mu + \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$
En effet, si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites réelles, il n'est pas vrai en général que $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$ (prendre $a_n = -b_n = n$). Cependant, si (b_n) converge, il est vrai que $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

Exercice II.

A. (A1 – *2 points*) Il fallait être précis dans la rédaction.

(A2 – *1,5 points*) Rien à signaler.

(A3 – *2,5 points*) Quelques copies traitent le cas où $f = \lambda \mathbb{1}_A$ (voire $f = \mathbb{1}_A$) pour $A \in \mathcal{A}$, puis écrivent que le résultat s'étend immédiatement par linéarité aux fonctions étagées. Il fallait donner un peu de détails, car en général $f \mapsto \nu\{x \in E; f(x) > t\}$ n'est pas linéaire.

B. (B1 – *2 points*) Il fallait donner un exemple dans $\mathbb{R}^d$.

(B2 – *2 points*) Rien à signaler.

(B3 – *2 points*) Rien à signaler.

(B4 – *2 points*) Toute interversion de limites de type

$$\liminf_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n} \le \liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{m,n}$$

devait être justifiée.

Exercice III.

(i – *1 point*) Dans la mesure du possible, évitez les formulations de type *[...] est clairement une tribu* en leur préférant une petite justification rapide.

(ii – *1 point*) Rien à signaler.

(iii – *1 point*) Rien à signaler.

(iv – *1 point*) Rien à signaler.