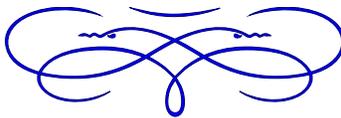


## Partiel : remarques et barème.



Chaque question, à l'exception des questions (A2) et (B1), rapportait un bonus de +0,5 points si elle été parfaitement traitée.

*Commentaire général.* Évitez les mots de type *trivialement*, *clairement* en leur préférant une petite justification (même rapide) :

*Ce qui se conçoit clairement s'énonce aisément.*

**Exercice I (2,5 points).** Il fallait faire attention à quelques petits pièges malicieux et diaboliques :

- Il ne fallait pas écrire  $\int h_n^+ d\mu \rightarrow \int h^+ d\mu$  sans justification. En effet, dire que  $\int h_n^+ d\mu \rightarrow \int h^+ d\mu$  et  $\int h_n^- d\mu \rightarrow \int h^- d\mu$  revient à dire que  $h_n \rightarrow h$  dans  $\mathbb{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ , ce qui est (en général) plus fort que  $\int h_n d\mu \rightarrow \int h d\mu$ . Rappelons cependant que si  $h_n \geq 0$ , alors d'après le lemme de Scheffé, les assertions  $\int h_n d\mu \rightarrow \int h d\mu$  et  $h_n \rightarrow h$  dans  $\mathbb{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  sont équivalentes. Dans notre cas  $h_n$  n'était pas forcément positive.
- Avant d'écrire  $\int g d\mu$  il fallait s'assurer que  $g \in \mathbb{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ . Si  $g$  était positive, on rappelle que  $\int g d\mu$  aurait toujours un sens, mais ici  $g$  est de signe quelconque.
- Il ne fallait pas écrire une inégalité du type

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int g_n d\mu + \int f_n d\mu \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

mais une égalité de type

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int g_n d\mu + \int f_n d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

En effet, si  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont deux suites réelles, il n'est pas vrai en général que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$  (prendre  $a_n = -b_n = n$ ). Cependant, si  $(b_n)$  converge, il est vrai que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

**Exercice II.**

- A. (A1 - 2 points) Il fallait être précis dans la rédaction.  
 (A2 - 1,5 points) Rien à signaler.  
 (A3 - 2,5 points) Quelques copies traitent le cas où  $f = \lambda \mathbb{1}_A$  (voire  $f = \mathbb{1}_A$ ) pour  $A \in \mathcal{A}$ , puis écrivent que le résultat s'étend immédiatement par linéarité aux fonctions étagées. Il fallait donner un peu de détails, car en général  $f \mapsto \nu\{x \in E; f(x) > t\}$  n'est pas linéaire.
- B. (B1 - 2 points) Il fallait donner un exemple dans  $\mathbb{R}^d$ .  
 (B2 - 2 points) Rien à signaler.

(B3 – 2 points) Rien à signaler.

(B4 – 2 points) Toute interversion de limites de type

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{m,n}$$

devait être justifiée.

### Exercice III.

- (i – 1 point) Dans la mesure du possible, évitez les formulations de type [...] *est clairement une tribu* en leur préférant une petite justification rapide.
- (ii – 1 point) Rien à signaler.
- (iii – 1 point) Rien à signaler.
- (iv – 1 point) Rien à signaler.