I Mesures aléatoires de Poisson

1) Définition

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On suppose dans toute la suite que $(E, \mathcal{E})$ est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

Une mesure ponctuelle sur E est une mesure μ sur S de la forme $\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$ où I fini ou dénombrable, $x_i \in E$.

On note $M_p(S) = \{\text{mesures ponctuelles}\}$, muni de la tribu $\mathcal{M}$ engendrée par les applications $\mu \longmapsto \mu(A)$ $(A \in \mathcal{S})$.

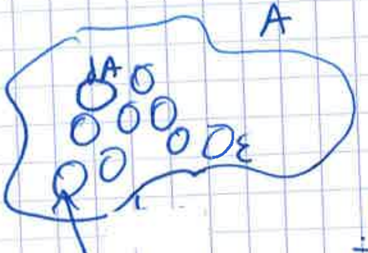
Déf Soit ν une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$. Une mesure (aléatoire) de Poisson sur S d'intensité ν est une v.a. N à valeurs dans $(M_p(S), \mathcal{M})$ tq :

(1) $\forall A \in \mathcal{S}$, $N(A) \overset{(d)}{=} \text{Poisson}(\mu(A))$

(2) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, les v.a $N(A_1), \dots, N(A_n)$ sont $\perp\!\!\!\perp$

Remarques (1) Motivation

$$\mathbb{P}(N(dA) = 1) \sim \mu(dA).$$



ε.x

$N(A) \approx \sum$ v.a Bernoulli $\perp\!\!\!\perp$

$$\approx \sum_{i=1}^{\mu(A)/\varepsilon} \text{Ber}(\varepsilon) \approx \text{Bin}\left(\frac{\mu(A)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \xrightarrow[\text{poisson}]{} \mu(A). \quad \frac{\varepsilon}{\mu(A)}$$

(2) La loi de N est caractérisée par (1) et (2) :

(1) et (2) déterminent $\mathbb{P}(N(A_1) = k_1, \dots, N(A_n) = k_n)$ avec $A_i \in \mathcal{S}$ et $k_i \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et

$$\{\mu \in M_p(S) \,;\, \mu(A_1) = k_1, \dots, \mu(A_n) = k_n\}$$

est une classe de $\mathcal{M}$ stable par $\cap$ qui engendre $\mathcal{M}$.

Théorème Soit ν mesure σ-finie sur $(S, \mathcal{S})$. Il existe une mesure de Poisson d'intensité ν

Cas ν finie - On suppose $\nu(E) > 0$. On pose $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\nu(E)}$.

On se donne : $\cdot N = \text{Poisson}(\nu(E))$.

$\cdot (X_i)_{i\geq 1}$ v.a iid de loi $\bar{\nu}$, $\perp\!\!\!\perp N$.

On pose $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i}$. (bien mesurable).

Soient $A_1, \dots, A_{p-1} \in \mathcal{E}$, $u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{R}$. On pose $A_p = E \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} A_i$,

On note $Z_n = e^{iu_1} \mathbb{1}_{X_n \in A_1} + \dots + e^{iu_p} \mathbb{1}_{X_n \in A_p}$

En particulier $Z_1 \cdots Z_N = \prod_{1\leq k\leq p} e^{iu_k \mathcal{N}(A_k)}$.

Donc $\mathbb{E}\left[\prod_{1\leq k\leq p} e^{iu_k \mathcal{N}(A_k)}\right] = \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N=k)\, \mathbb{E}[Z_1 \cdots Z_k]$

$= e^{-\nu(E)} + \sum_{k\geq 1} e^{-\nu(E)} \frac{\nu(E)^k}{k!} \mathbb{E}[Z_1]^k$

$= e^{-\nu(E)} + e^{-\nu(E)} \cdot \left(e^{\nu(E)\mathbb{E}[Z_1]} - 1\right)$

$= e^{\nu(E)(\mathbb{E}[Z_1] - 1)}$

Or $\mathbb{E}[Z_1] = e^{iu_1} \frac{\nu(A_1)}{\nu(E)} + \dots + e^{iu_p} \frac{\nu(A_p)}{\nu(E)}$

$= e^{\nu(A_1)(e^{iu_1} - 1) + \dots + \nu(A_p)(e^{iu_p} - 1)}$.

$\Rightarrow$ On a bien (1) et (2)

Cas ν σ-finie : On écrit $E = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$ avec les E_p disjoints et $\nu(E_p) < \infty$.

On construit $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots$ $\perp\!\!\!\perp$ tq $\mathcal{N}_i$ soit d'intensité ν_i.

On vérifie que $\mathcal{N} = \sum_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_p$ convient.

Corollaire Si $\mathcal{N}$ mesure de Poisson d'intensité ν et $A \in \mathcal{E}$ tq $0 < \nu(A) < \infty$, Alors
$\mathcal{N}(A) \overset{(d)}{=} \text{Poisson}(\nu(A))$, et conditionnellement à $\{\mathcal{N}(A) = k\}$, la loi de $\mathcal{N}_{|A} \overset{(d)}{=} \sum_{i=1}^{k} \delta_{X_i}$
où $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ iid de loi $\left(\frac{\nu(\cdot \cap A)}{\nu(A)}\right)$.

Prop si ν n'a pas d'atomes, p.s $\forall x \in E$, $\mathcal{N}(\{x\})$

Preuve : • si $\nu(E) < \infty$ ok par le corollaire
Ainsi p.s $\mathcal{N} \in \{\mu \in M_p(E) ; \mu(E) < \infty$ et $\forall x \in E$ $\mu(\{x\}) \leq$
mesurable. On conclut en prenant une union dénombrable

N.B $\nu(A) = \mathbb{E}[\mathcal{N}_A]$.

2) Fonctionnelles

On suppose ici que $\mathcal{N}$ est une mesure de Poisson sur E d'intensité ν non nulle.

Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable

Lemme : 1) $\int \mathcal{N}(dx) f(x)$ est une variable aléatoire
2) $\mathbb{E}\left[\int \mathcal{N}(dx) f(x)\right] = \int f(x) \nu(dx)$.

Preuve : on vérifie le résultat pour $f = \mathbb{1}_A$, puis étagée, puis on conclut par approx + CV monotone

N.B $\nu(A) = \mathbb{E}[\mathcal{N}_A]$.

Thm (formule exponentielle)

N est une mesure de Poisson sur E d'intensité ν ssi $\forall f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int N(dx) f(x)\right)\right] = \exp\left(-\int \nu(dx)(1-e^{-f(x)}\right)$$

Preuve $\boxed{\Rightarrow}$ ok.

$\boxed{\Leftarrow}$ On prend $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ $A_1, \dots, A_p$ disjoints et $f = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$

Ainsi $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i N(A_i)\right)\right] = \prod_{i=1}^{p} e^{-\nu(A_i)(1-e^{-\lambda_i})}$

Donc $N(A_i) \overset{(u)}{=} \text{Poisson}(\nu(A_i))$ et les $N(A_i)$ sont $\underline{\perp\!\!\!\perp}$.

$\boxtimes$

Corollaire (exercice)

Si $\int 1 \wedge f \, d\nu < \infty$, alors $\mathbb{P}\left(\int N(dx) f(x) < \infty\right) = 1$

Si $\int 1 \wedge f \, d\nu = \infty$, alors $\mathbb{P}\left(\int N(dx) f(x) = \infty\right) = 1$

Théorème (formule de Palm)

Soit $F : E \times M_p(E) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurable. Alors

$$\mathbb{E}\left[\int N(dx) \, F(x, N - \delta_x)\right] = \int_E \nu(dx) \, \mathbb{E}[F(x, N)].$$

Preuve Pour simplifier, supposons ν finie et utilisons le corollaire.

$$\mathbb{E}\left[\int \mathcal{N}(dx) F(x, \mathcal{N}-\delta_x)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} F(X_i, \delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_N}-\delta_{X_i})\right]$$

où $N \overset{(d)}{=} \text{Poiss}(\nu(E))$, X_i iid de loi $\frac{\nu(\cdot)}{\nu(E)}$

$$=$$

$$= \sum_{p\geq 1} \mathbb{P}(N=p)\, \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{p} F(\delta_{X_p}, \delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_{p-1}})\right]$$

$$= \sum_{p\geq 1} p\, \mathbb{P}(N=p)\, \mathbb{E}\left[F(\delta_{X_p}, \delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_{p-1}})\right].$$

$$= \sum_{p\geq 1} p \cdot e^{-\nu(E)} \cdot \frac{\nu(E)^p}{p!} \cdot \int \frac{\nu(dx)}{\nu(E)}\, \mathbb{E}\left[F(x, \delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_{p-1}})\right]$$

$$= \int \nu(dx) \sum_{p\geq 1} \frac{\nu(E)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e^{-\nu(E)}\, \mathbb{E}\left[F(x, \delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_{p-1}})\right].$$

$$= \int \nu(dx)\, \mathbb{E}\left[F(x, \mathcal{N})\right].$$

~~Corollaire (exercice)~~

~~Si $\int 1\wedge f\, d\nu < \infty$, alors $\mathbb{P}(\mathcal{N}_f < \infty) = 1$~~

~~Si $\int 1\wedge f\, d\nu = \infty$, alors $\mathbb{P}(\mathcal{N}_f = \infty) = 1$.~~

3) Propriétés de stabilité

Image $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ mesurable. $\mathcal{N}$ mesure de poisson d'intensité ν. Alors l'image $f_* \mathcal{N}$ est une mesure de Poisson d'intensité $f_* \nu$. (N.B $f_* \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(f^{-1}(A))$).

Superposition $\mathcal{N}$ mesure de Poisson d'intensité ν,

$\mathcal{N}'$ ——— ν'

Alors $\mathcal{N}+\mathcal{N}'$ ——— $\nu+\nu'$

Restriction Soient $A_1, \dots, A_k$ disjoints. Alors $N_{1_{A_1}}, \dots, N_{1_{A_k}}$ sont des mesures de Poisson indépendantes et l'intensité de $N_{1_{A_i}}$ est $\mu(\cdot \cap A_i)$.

Marquage Soit $N = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}$ une mesure de Poisson d'intensité ν.
Soit $(y_n)_{n \geq 1}$ des v.a iid de loi ν' sur $(F, \mathcal{F})$ $\perp\!\!\!\perp N$.
Alors
$$N' = \sum_{i=1}^{N} \delta_{(x_i, y_i)}$$
est une mesure de Poisson sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ d'intensité $\mu \otimes \mu'$

preuve Soit $g : E \times F \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On calcule:

$$\mathbb{E}\left[\exp(-N'_g) \mid N, x_1, x_2, \dots\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{N} g(x_i, y_i)\right) \mid N, x_1, x_2, \dots\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{N} \int_F \nu'(dy)\, e^{-g(x_i, y)}$$
$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \left(-\ln \int_F \nu'(dy)\, e^{-g(x_i, y)}\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\int N(dx) F(x)\right)$$
où $F(x) = -\ln \int_F \mu'(dy)\, e^{-g(x,y)} \geq 0$.

On applique la formule exponentielle:
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int N'(dx) g(x)\right)\right] = \exp\left(-\int \nu(dx)\left(1 - e^{-F(x)}\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\int \nu(dx) \nu'(dy) \left(1 - e^{-g(x,y)}\right)\right). \blacksquare$$

Rq $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ ($N_t - \lambda t$ est une martingale)

2) Intégrale par rapport à un processus de Poisson

a) Rappels sur les processus

Pour $t \geq 0$, soit $V_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

On peut voir V comme une fonction mesurable

$$(\Omega, \mathcal{F}) \longmapsto \mathbb{R}^{\otimes \mathbb{R}^+} \quad \text{tribu cylindrique.}$$

$$\omega \longmapsto (V_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}^+}$$

Autre point de vue : on considère

$$\overline{V} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, \omega) \longmapsto V_t(\omega).$$

On dit que $\overline{V}$ est mesurable si $\overline{V}$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

Déf Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

(a) $\mathcal{P}^{pr}$ est la classe des sous-ensembles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ de la forme :
- $\mathbb{R}_+ \times \Omega$
- $]s, t] \times A$ avec $A \in \mathcal{F}_s$
- $\{0\} \times A$ avec $A \in \mathcal{F}_0$.

C'est un π-système.

(b) La tribu prévisible est $P_{prév} = \sigma(\mathcal{P}^{pr})$.

(c) V est dit $(\mathcal{F}_t)$ prévisible ssi

$$\overline{V} : \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est } (P_{prév}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$
$$(t, \omega) \longmapsto V_t(\omega)$$

mesurable.

Prop (exo)

(a) $P_{prév}$ est la plus petite tribu qui rende $\overline{V}$ mesurable pour tout processus V càg et $(\mathcal{F}_t)$ adapté.

(b) Si V est prévisible, alors $(V_t)_{t \geq 0}$ est $(\mathcal{F}_{t-})_{t \geq 0}$ adapté.

(c) Si $(V_t)_{t \geq 0}$ est càg et $(\mathcal{F}_t)$ adapté, alors $(V_t)_{t \geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.

b) Intégration par rapport à un processus de Poisson

Ici, $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration càd complétée.

Soit $(V_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson de param λ, de temps de sauts $(T_n)_{n\geq 1}$. On pose

$$\boxed{\int_0^t V_s\, dN_s = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n)\, V_{T_n}.}$$

Prop Si $V\geq 0$, on a
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t V_s\, dN_s\right] = \lambda\, \mathbb{E}\left[\int_0^t V_s\, ds\right]. \quad (*)$$

Preuve : Soit $C =]s_0, t_0] \times A$ avec $A \in \mathcal{F}_{s_0}$.

On vérifie $(*)$ avec $V_t(\omega) = \mathbb{1}_C(t,\omega)$.

On a $$\int_0^t V_s\, dN_s = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n)\, \mathbb{1}_{]s_0,t_0]}(T_n)\, \mathbb{1}_A(\omega)$$

$$= \mathbb{1}_A(\omega)\,(N_{t\wedge t_0} - N_{s\wedge s_0}).$$

De m̂, $\int_0^t V_s\, ds = \mathbb{1}_A(\omega)\,(t\wedge t_0 - s\wedge s_0)$.

- Pour $t \leq s_0$, tout est nul
- Pour $s_0 < t \leq t_0$: $\int_0^t V_s\, dN_s = \mathbb{1}_A(\omega)\,(N_t - N_{s_0})$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^t V_s\, dN_s \,\middle|\, \mathcal{F}_{s_0}\right] = \mathbb{1}_A\, \mathbb{E}[N_t - N_{s_0} \mid \mathcal{F}_{s_0}]$$
$$= \mathbb{1}_A\, \lambda\,(t - s_0).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^t V_s\, dN_s\right] = \mathbb{P}(A)\cdot \lambda\,(t-s_0),\ \text{d'où } (*).$$

- On raisonne de m̂ pour $t > t_0$.

En suite : $\mathcal{L} = \{ D \in \mathcal{P}_{\text{prév}} \,;\, (*) \text{ est vraie pour } V_t(\omega) = \mathbb{1}_D(t,\omega) \}$.

Classe monotone qui contient $\mathcal{P}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \underline{\mathcal{P}_{\text{prév}}}$.

$\Rightarrow$ on en déduit que $(*)$ a lieu pour

$\tilde{V} = c_1 \mathbb{1}_{D_1} + \cdots + c_n \mathbb{1}_{D_n}$ avec $D_i \in \mathcal{P}_{prov}$ .mes.

On conclut par CVMON.

⚠ $\int_0^t W_s \, dN_s = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n) W_{T_n} = \frac{N_t(N_t+1)}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\int_0^t N_s \, dN_s] = \frac{(\lambda t)^2 + \lambda t + \lambda t}{2}$

et $\lambda \mathbb{E}[\int_0^t N_s \, ds] = \lambda \int_0^t \lambda s \, ds = \frac{\lambda^2 t^2}{2}$.

c) Application

Ici $(\mathcal{F}_t)$ filtration càd complète.

Thm Soient $N^1, \dots, N^d$ des $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson. Ils ne sautent pas en même temps. ssi ils sont indépendants.

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$ ok.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pour simplifier on suppose $d = 2$.

Par indépendance et stationnarité des accroissements, il suffit de prouver que $N_t^1 \perp\!\!\!\perp N_t^2$ à t fixé.

On pose $X_t = \exp(i(u N_t^1 + v N_t^2))$

Alors $X_t = 1 + \sum_{0 \leq s \leq t} (X_s - X_{s-})$

$= 1 + \sum_{0 \leq s \leq t} X_{s-} \left(e^{i(u \Delta N_s^1 + v \Delta N_s^2)} - 1 \right)$

$= 1 + \sum_{0 \leq s \leq t} X_{s-} \left((e^{iu} - 1) \Delta N_s^1 + (e^{iv} - 1) \Delta N_s^2 \right)$

or $\sum_{0 \leq s \leq t} X_{s-} (e^{iu} - 1) \Delta N_s^1 = \int_0^t X_{s-} e^{iu} \, dN_s$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[X_t] = 1 + \lambda_1(e^{iu}-1)\int_0^t \mathbb{E}[X_{s-}]\,ds + \lambda_2(e^{iv}-1)\int_0^t \mathbb{E}[X_{s-}]\,ds.$$

or $\{s ; X_s \neq X_{s-}\}$ est dénombrable.

$$= 1 + \int_0^t \mathbb{E}[X_s]\left(\lambda_1(e^{iu}-1) + \lambda_2(e^{iv}-1)\right)ds$$

On en déduit que $\mathbb{E}[X_t] = e^{(\lambda_1(e^{iu}-1)+\lambda_2(e^{iv}-1))t}$

$$= \mathbb{E}[e^{iuN_t^1}]\,\mathbb{E}[e^{ivN_t^2}]. \qquad \square$$

⚠ les processus de Poisson doivent être adaptés à la même filtration (prendre $N_t^1 = N_t$, $N_t^2 = N_{2t}$).