TD 8 — Séries de Fourier, espaces de Hilbert, espaces $\mathbb{L}^p$

On rappelle les notations suivantes :

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{e}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $\mathbf{e}_k(t) = \exp(2i\pi kt)$ et note de la même façon sa restriction à $[0,1]$.
- On note $F_n = \mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_k; -n \le k \le n\}$.
- Lorsque $f \in \mathbb{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$, on note $c_n(f) = \int_{[0,1]} f(t) e^{-2i\pi nt} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et

$$p_{F_N}(f) = \sum_{|k| \le N} c_k(f) \mathbf{e}_k, \qquad \Phi_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{0 \le n \le N} p_{F_n}(f).$$

pour $N \ge 0$

1 – Petites questions

1) Soient f, g deux fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Rappeler pourquoi $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

2) Prouver que

$$\Phi_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k(f) \mathbf{e}_k.$$

2 – Séries de Fourier

Exercice 1. **(Théorème de Féjer version $\mathbb{L}^p$ et injectivité des coefficients de Fourier)** Soient $1 \le p < \infty$ et $f \in \mathbb{L}^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$.

1. Soit $1 \le r \le \infty$. Si $g \in \mathbb{L}^r(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ prouver que $\|g * h\|_r \le \|g\|_r \cdot \|h\|_1$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Hölder avec la mesure à densité $|h(y)|dy$.
2. Prouver que $\|f - \Phi_N(f)\|_p \to 0$ lorsque $N \to \infty$.
   Indication : on pourra essayer d'approximer f.
3. En déduire que si $f \in \mathbb{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$ et que $c_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ presque partout.

Exercice 2. (**Noyau de Poisson**) Pour $0 \le r < 1$ et $y \in \mathbb{R}$ on note $P_r(y)$ le noyau de Poisson défini par

$$P_r(y) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(y) + r^2}.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

On pourra vérifier que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{iny} = P_r(y).$$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable, continue presque partout, 1-périodique telle que $\int_{[0,1]}|f|dx < \infty$.

1. Montrer que pour tout $0\le r<1$ et $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n\in Z} c_n(f)r^{|n|}e^{2i\pi nx} = \int_{[0,1]} f(x-y)P_r(2\pi y)dy.$$

2. En déduire que pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|}e^{2i\pi nx} \underset{r\to 1, r<1}{\longrightarrow} f(x).$$

3. ✶✶✶ – Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction mesurable, 1-périodique telle que $\int_{[0,1]}|f|dx<\infty$, est-il encore vrai que pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|}e^{2i\pi nx} \underset{r\to 1, r<1}{\longrightarrow} f(x)?$$

Remarque culturelle. Si $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$, $\partial\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$, et $f:\partial\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ est continue, alors la fonction

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(e^{it})dt, \quad 0\le r<1$$

est l'unique fonction sur $\overline{\mathbb{D}}$ harmonique sur $\mathbb{D}$ et coincidant avec f sur $\partial\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$. Ceci illustre l'importance du noyau de Poisson.

Pour voir que u est bien harmonique, on peut voir que c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe (voir exercice 5 pour une définition) par une autre représentation intégrale équivalente :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})\right).$$

3 – Espaces de Hilbert

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $T:H\to H$ une application linéaire continue. On rappelle que $\|T\|=\sup\{\|T(x)\|;\|x\|=1\}$.

1. Prouver que $\|T\|=\sup\{|\langle T(x),y\rangle|;\|x\|\le 1,\|y\|\le 1\}$.
2. Prouver qu'il existe une unique application linéaire $T^*:H\to H$ telle ques les trois propriétés suivantes soient vérifiées :
   (a) $\langle T(x),y\rangle = \langle x,T^*(y)\rangle$ pour tous $x,y\in H$
   (b) $\|T\|=\|T^*\|$
   (c) $(T^*)^*=T$

   L'application linéaire continue T^* est appelée *adjoint* de T.
3. ✶ – Si $T=T^*$ (on dit que T est symétrique), prouver que

$$\|T\|=\sup\{|\langle T(x),x\rangle|;\|x\|=1\}.$$

Exercice 4. **(Opérateurs de Hilbert-Schmidt)** On se place dans $H = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (ce qui suit reste valable pour $H = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ mais on prend $d = 1$ pour simplifier les notations). Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Lorsque pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ la quantité $T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$ est bien définie, on dit que $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur intégral et que K est son noyau.

Si $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt*. Dans la suite, on considère un opérateur de Hilbert-Schmidt T de noyau K.

1. Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $y \mapsto K(x,y)f(y)$ est intégrable.
2. Montrer que l'application linéaire T est continue et que $\|T\| \leq \|K\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}$.
3. Prouver que l'adjoint T^* de T est un opérateur intégral de noyau $(x,y) \mapsto \overline{K(y,x)}$.

Remarque culturelle. L'étude des espaces de Hilbert a été initiée par des questions d'existence de solutions à l'équation $f - T(f) = g$ avec g fixé et T un opérateur intégral à noyau.

4 – À chercher pour la prochaine fois

Pour préparer le partiel à venir, chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sur disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. **(Théorème de Fatou)** On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. On dit qu'une fonction $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si pour tout $z \in \mathbb{D}$ la limite

$$\lim_{y \to z, y \in \mathbb{D}} \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

existe. Soit $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Montrer que pour presque tout $t \in [0,1]$ la limite

$$\lim_{r \to 1, r < 1} F(re^{2i\pi t})$$

existe.

On admettra (ceci sera prouvé dans le cours d'analyse complexe) que F est developpable en série entière en tout point de $\mathbb{D}$ et que si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est le développement en série entière de F autour de 0, alors cette série convergence normalement lorsque $z = re^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ fixé.

Indication. On pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{2i\pi nt}$ et admettre que la réponse à la dernière question de l'exercice 2 est oui.

Exercice 6. **(Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$.)** On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \leq p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.
   (a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.
   (b) Montrer que pour tout n assez grand, $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon$.
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.
2. Conclure.

Fin