TD 7 — Espaces $\mathbb{L}^p$ – Corrigé

0 – Exercices à préparer

Exercice 0. **(Spoiler : convolution inside)** Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, f = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Corrigé :

Puisque K est un compact, $\mathrm{d}(K,\Omega^c) = c > 0$. Si ϕ est une fonction positive, $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans $[-c/3,c/3]^d$ et d'intégrale 1, alors

$$f = 1_{K+[-c/3;c/3]^d} * \phi$$

convient. En effet, l'écriture

$$f(x) = \int 1_{K+[-c/3;c/3]^d}(x-u)\phi(u)du = \int_{[-c/3;c/3]^d} 1_{K+[-c/3;c/3]^d}(x-u)\phi(u)du$$

montre aisément que $f(x) = 1$ si $x \in K$ et $f(x) = 0$ si $x \in \Omega^c$. On voit également que f est C^∞. □

1 – Petites questions

0) Donner un exemple de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ telle que $f \notin L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

1) Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f. Rappeler pourquoi il existe une extractrice ϕ et une fonction $h \in \mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$ telle que $(f_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ converge μ-p.p. vers f et $|f_{\phi(n)}| \leq h$ pour tout $n \geq 1$, μ-p.p.
Indication : Calquer la démonstration de la complétude des espaces $\mathbb{L}^p$.

2) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ-p.p.

3) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu) \cap \mathbb{L}^q(E,\mathcal{A},\mu)$ avec $p,q \in [1,+\infty[$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$.
Corrigé :

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

0) Pour le premier exemple, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)^2}$ sur $]0, 1/2[$. Pour le deuxième exemple, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1) La démonstration de la complétude des espace $\mathbb{L}^p$ est importante et est à connaître.

On se limite au cas $p < \infty$. Comme la suite (f_n) est convergente, elle est de Cauchy et on peut alors choisir une extraction $(\phi(k))_{k\geq 0}$ telle que

$$\|f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}\|_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

(par exemple, prendre $\phi(n) = \min\{k > \phi(n-1); \forall l \geq k, \|f_l - f_k\|_p < 2^{-n}\}$. Pour simplifier les notations, on pose $g_n = f_{\phi(n)}$.

Exactement comme dans la preuve de la complétude des espace $\mathbb{L}^p$, on montre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g_{n+1} - g_n| \in \mathbb{L}^p \tag{1}$$

Cette dernière série est donc μ-p.p. finie, autrement dit la série de terme général $g_{n+1} - g_n$ converge absolument, μ-p.p. Elle converge donc μ-p.p. On peut ainsi poser :

$$F = g_0 + \sum_{n\geq 0} (g_{n+1} - g_n).$$

Exactement comme dans la preuve de la complétude des espace $\mathbb{L}^p$, on montre que $g_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} F$ lorsque $n \to \infty$, Or, par hypothèse, $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} f$. Ainsi $f = F$ μ-p.p, et g_n converge bien μ-p.p. vers f.

D'autre part, on a immédiatement

$$|g_n| \leq |g_0| + \sum_{n\geq 0} |g_{n+1} - g_n|.$$

Il suffit alors de poser $h = |g_0| + \sum_{n\geq 0} |g_{n+1} - g_n|$, qui est dans $\mathbb{L}^p$ d'après l'inégalité de Minkowski et (1).

2) On utilise Fatou pour prouver que $g \in \mathbb{L}^p$ (ou convergence dominée avec la domination de la question précédente). D'après la question précédente, il existe une extractrice ϕ telle que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} f$, et une extractrice ψ telle que $f_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} g$. Mais $f_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} f$, et donc $f = g$ μ-p.p. □

3) La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$ donc il existe une fonction $f \in \mathbb{L}^q$ telle que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$. On peut extraire de $(f_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite $(f_{\phi(k)})_{k\geq 0}$ telle que $f_{\phi(k)} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$. Par ailleurs $f_{\phi(k)} \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $k \to \infty$. Donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{\phi(\psi(j))})_{j\geq 0}$ telle que $f_{\phi(\psi(j))} \to 0$ μ-p.p. quand $j \to \infty$. On en déduit donc que $f = 0$ μ-p.p. □

□

2 – Espaces $\mathbb{L}^p$

Rappel (**Théorème d'Egoroff** – TD 3, Exercice 5). Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite fonctions qui converge μ-p.p. vers f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que la suite f_n converge uniformément vers f sur $E \setminus A_\varepsilon$.

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.

3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Corrigé :

Cas $p < +\infty$.

1. D'après le lemme de Fatou on a

$$\int_E |f|^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\mu \leq \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_p^p < \infty,$$

et donc $f \in \mathbb{L}^p$.

2. On fixe $r \in [1, p[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\sup_{x\in E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $n \geq n_0$ on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\
&\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon^{1-r/p} \left(\int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{r/p} \\
&\leq \varepsilon^r \mu(E) + 2^r \varepsilon^{1-r/p} \left(\|f\|_p^p + \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_p^p \right)^{r/p}
\end{aligned}$$

□

Cas $p = +\infty$.

1. On a l'existence d'une constante $M < \infty$ telle que $\mu(|f_n| > M) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Or

$$\{f > M\} \subset \bigcup_{n\geq 0} \{|f_n| > M\}.$$

Donc $\mu(|f| > M) = 0$ et $f \in \mathbb{L}^\infty$.

2. On fixe $r \in [1, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\sup_{x\in E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\
&\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon (2M)^r.
\end{aligned}$$

□

Exercice 2. **(Lemme de Scheffé)** Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Indication : considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du théorème de convergence dominée.

Corrigé :

L'implication est toujours vérifiée (même sans convergeance μ-p.p.) car $\left| \|f_n\|_p - \|f\|_p \right| \leq \|f_n - f\|_p$ d'après l'inégalité triangulaire.

Pour la réciproque, comme suggéré, introduisons $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, qui est une fonction positive d'après l'inégalité triangulaire, convergeant μ-p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$. Le lemme de Fatou fournit :

$$\int (\liminf_{n\to\infty} g_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu$$

Or $2^{p+1} \int |f|^p d\mu = \int (\liminf_{n\to\infty} g_n) d\mu$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2^{p+1} \int |f|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu &= 2^p \liminf_{n\to\infty} \int (|f_n|^p + |f|^p) d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \\ &= 2^{p+1} \int |f|^p d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ lorsque $n \to \infty$ pour la dernière égalité. Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \leq 0,$$

ce qui conclut.

Remarque : si on oublie l'hypothèse de convergence μ-p.p., la réciproque est fausse (trouvez un contre-exemple !). $\square$

Exercice 3. **(Théorème de Lusin, le retour)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\epsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et f soit continue sur K_ϵ.

Indication : on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a,b]$ sont denses dans $L^1([a,b])$.

Corrigé :

Comme f est finie, il existe $n \geq 1$ tel que $\lambda(\{|f| \geq n\}) < \epsilon$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O_ϵ tel que $\{|f| \geq n\} \subset O_\epsilon$ et $\lambda(O_\epsilon) < 2\epsilon$.

La fonction $g = f \mathbb{1}_{O_\epsilon^c}$ est bornée, donc dans $\mathbb{L}^1([a,b])$. Il existe ainsi une suite de fonctions continues f_n telles que $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} g$. Il existe une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} g$. D'après le théorème d'Egoroff, il existe un ensemble mesurable A_ϵ tel que $\lambda(A_\epsilon) \leq \epsilon$ et la convergence $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} g$ soit uniforme sur $[a,b] \backslash A_\epsilon$.

Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O'_ϵ tel que $A_\epsilon \subset O'_\epsilon$ et $\lambda(O'_\epsilon) < 2\epsilon$. De plus, la convergence $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} g$ est uniforme sur $[a,b] \backslash O'_\epsilon$.

Les fonctions f_n étant continues, il s'ensuit que g est continue sur $[a,b] \backslash O'_\epsilon$. Posons finalement $K_\epsilon = [a,b] \backslash (O'_\epsilon \cup O_\epsilon)$. Ainsi, la fonction f est continue sur K_ϵ, et on a $\lambda([a,b] \cap K_\varepsilon^c) \leq 4\varepsilon$, ce qui conclut.

Remarque 1. En prenant l'union de ces compacts quand $\epsilon \to 0$, on ne peut pas en déduire que f est continue sur $[a,b]$ privé d'un ensemble de mesure nulle, car si f est continue sur des compacts K_n (pour $n \geq 1$) elle n'est pas forcément continue sur leur union $\cup_{n\geq 1} K_n$. D'ailleurs, si A désigne l'ensemble de Cantor triadique vu précemment en TD (c'est un compact de $[0,1]$ de mesure strictement positive et d'intérieur vide) et si on note $f = \mathbb{1}_A$ et qu'on considère un borélien $N \subset [0,1]$ de mesure nulle, il existe $x \in [0,1] \backslash N$ tel que f est discontinue en x. En effet, il existe $x \in [0,1] \backslash N$ tel que $x \in A$ (car A est de mesure non nulle). Comme A est d'intérieur vide, tout voisinage de x intersecte le complémentaire de A, ce qui prouve que f n'est pas continue en x.

Remarque 2. Dans l'exercice 5 du TD 6, on a montré le résultat plus fort suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

$\square$

Exercice 4. **(Inégalité de Hardy)** Soient $(X,\mathcal{X},\mu)$ et $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\varphi:(X\times Y,\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu\otimes\nu$, et F la fonction définie pour μ-p.t. $x\in X$ par $F(x)=\int_Y \varphi(x,y)\nu(dy)$.

1. Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\le\int_Y\|\varphi(.,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\nu(dy)$.
2. En déduire que pour toute fonction $f\in\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p\in]1,\infty[$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, vérifie l'inégalité suivante (appelée inégalité de Hardy) : $\|F\|_p\le\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Corrigé :

1. Soit $(X_n)_{n\ge1}\in\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $X=\cup_{n\ge1}X_n$ et telle que $\mu(X_n)<\infty$ pour tout $n\ge1$. On note $\Gamma_n=X_n\cap\{|F|\le n\}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_X|F(x)|^p\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx) &\le \int_X|F(x)|^{p-1}\left(\int_Y|\varphi(x,y)|\nu(dy)\right)\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\\ &= \int_Y\nu(dy)\left(\int_X|F(x)|^{p-1}|\varphi(x,y)|\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\right) \qquad \text{(Fubini-Tonnelli)}\\ &\le \int_Y\nu(dy)\left(\int_X|F(x)|^p\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\right)^{1-\frac{1}{p}}\|\varphi(.,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \qquad \text{(Hölder).}\end{aligned}$$

   Or $\int_X|F(x)|^p\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)<\infty$. On en déduit que (on voit ici l'intérêt d'introduire Γ_n, sinon on n'aurait pas pu diviser par une quantitié pouvant être infinie) :

$$\left(\int_X|F(x)|^p\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\right)^{1/p}\le\int_Y\nu(dy)\varphi(\cdot,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}.$$

   Mais la suite de fonctions $(\mathbb{1}_{\Gamma_n})_{n\ge1}$ tend simplement en croissant vers la fonction constante égale à un. D'après le théorème de convergence monotone, il vient :

$$\left(\int_X|F(x)|^p\mu(dx)\right)^{1/p}\le\int_Y\nu(dy)\varphi(\cdot,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}.$$

2. On remarque que

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(xy)dy.$$

   Il est tentant de prendre $\phi(x,y)=f(xy)$, mais cette fonction n'est pas nécessairement intégrable. On procède donc par approximation comme à la question précédente. Plus précisément, on applique la question 1. aux fonctions

$$\phi_n(x,y)=\mathbb{1}_{[1/n,n]}(x)|f(xy)|,$$

   et $G_n=\int_{\mathbb{R}_+^*}\phi_n(x,y)dx$. Vérifions pour cela que chaque ϕ_n est intégrable. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times[0,1]}\phi_n(x,y)dxdy=\int_{1/n}^n\left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|dt\right)dx\le\int_{1/n}^n\frac{dx}{x}\int_0^n|f(t)|dt<\infty.$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\|G_n\|_p \leq \int_{[0,1]} \|\phi_n(\cdot, y)\|_p dy,$$

et

$$\|\phi_n(\cdot, y)\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(xy)|^p dx = \frac{1}{y}\|f\|_p^p.$$

On a donc

$$\|G_n\|_p \leq \|f\|_p \int_{[0,1]} \frac{1}{y^{1/p}} dy = \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Puis, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\|G\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p,$$

où $G : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt$. Enfin on remarque que $\|F\|_p \leq \|G\|_p$, ce qui conclut. □

□

Exercice 5. **(Super Hölder)**

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
   Indication :
   $$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$
2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$ l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

Corrigé :

1. On utilise l'inégalité généralisée de Hölder
   $$\left(\int f_1 f_2 f_3\right) \leq \left(\int f_1^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\int f_2^{1/\beta}\right)^{\beta} \left(\int f_3^{1/\gamma}\right)^{\gamma},$$
   pour $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ici on pose $\alpha = \frac{1}{r}, \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ et $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ alors l'indication amène à
   $$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |f(x-y)|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.$$
   D'où
   $$\|f * g\|_r^r \leq \underbrace{\int\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dx dy}_{\leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q} \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q},$$
   ce qui permet de conclure.
2. On considère l'application $\Phi : h \in \mathbb{L}^p \mapsto af * h + g$. Alors d'après la question précédente
   $$\|\Phi(h) - \Phi(h')\|_p \leq a\|f\|_1 \|h - h'\|_p,$$
   est une contraction de $\mathbb{L}^p$. Cet espace est complet, donc Φ admet un unique point fixe, ce qui résoud la question. □

□

Exercice 6. **(Continuité de l'opérateur de translation)**
Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \ x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.
2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$

$$\lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p.$$

   Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question (2.) si $p = \infty$?
4. – Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

Corrigé :

1. Pour $p = \infty$ c'est clair, et pour $p < \infty$ ceci provient du fait que l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \mapsto x - h$ est elle-même pour tout $h > 0$.
2. Soit f une fonction continue à support compact. La fonction f est donc uniformément continue. Soient $a < b$ deux réels tels que le segment $[a, b]$ contient le support de f. On a, pour tout $|h| < 1$,

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq (b - a + 2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p,$$

   et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$ quand $h \to 0$ (une autre possibilité est d'utiliser le théorème de convergence dominée).
   Soit h tel que $|h| > b - a$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned} & \|\tau_h f - f\|_p^p \\ = & \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \\ = & \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(f)\}} \, dx + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(\tau_h f)\}} \, dx \\ = & \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

   Soient maintenant $f \in \mathbb{L}^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \geq 0$,

$$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$

   c'est à dire

$$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

   Ainsi, on a

$$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$

   et

$$2^{1/p}\|f\|_p - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \leq \liminf_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq \limsup_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p}\|f\|_p.$$

   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit les deux limites.

3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \nrightarrow 0$ quand $h \to 0$. De même en posant $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \nrightarrow 2^{1/p}$ quand $|h| \to \infty$.
4. Notons $A_n = A \cap B(0,n)$. Alors $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$. Il existe donc $n \geq 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. On peut donc supposer que A est borné, de mesure strictement positive, de sorte que $f = \mathbb{1}_A$ est dans L^1. On a
$$\tau_h f - f = \mathbb{1}_{A\Delta(A+h)},$$
où Δ désigne la différence symétrique. Donc
$$\|\mathbb{1}_{A\Delta(A+h)}\|_1 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ ie } \lambda(A\Delta(A+h)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$
En particulier, $\lambda(A \cap (A+h)^c) \to 0$ donc $\lambda(A \cap (A+h)) \to \lambda(A)$. On peut donc trouver h_0 tel que $\lambda(A \cap (A+h)) > 0$ pour tout $h \leq h_0$. En particulier, $A \cap (A+h) \neq \emptyset$. Donc il existe $x, y \in A$ tels que $x = y + h$ ie $h = x - y$. On a donc montré que $]-h_0, h_0[\subset A - A$. □

□

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8.

1. Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$
2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1,+\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathbb{L}^p([0,x]) \subset \mathbb{L}^1([0,x])$ donc F est bien définie. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a, d'après l'inégalité de Hölder,
$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_E f\,\mathbb{1}_{[x,x+h]}\,d\mu \right| \leq \left(\int_E |f|^p\,\mathbb{1}_{[x,x+h]}\,d\mu \right)^{1/p} |h|^{1/q}.$$
Donc, en posant $G(x) = \int_0^x |f|^p\,d\mu$, on a
$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} (|G(x+h) - G(x)|)^{1/p} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$
car G est uniformément continue.
2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,dt$. D'après la question 1.,
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$
Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \geq n$ tel que $g(x_n) > \varepsilon$. On peut trouver $h_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $h \leq h_0$,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon |h|^{1/q}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [x_n, x_n + h_0]$, on a $g(t) \geq \varepsilon/2$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ peut-être choisie de sorte que les intervalles $[x_n, x_n + h_0]$ soient disjoints. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(t)|\,dt \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_n+h_0} |g(t)|\,dt \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon h_0}{2} = +\infty,$$

ce qui contredit l'intégrabilité de g.

□

Exercice 9. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Corrigé :

On note $(E_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante d'ensembles mesurables telle que $\mu(E_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et $\cup_{k\geq 0} E_k = E$. Supposons que $g \notin \mathbb{L}^\infty$. Alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble $\{2^n < g \leq 2^{n+1}\}$ est de mesure non nulle, il y a donc une infinité de n tels que pour un certain k,

$$X_{n,k} := \{2^n < g \leq 2^{n+1}\} \cap E_k$$

est de mesure non nulle (et finie). Soit Y_m une suite d'ensembles définie comme suit : $Y_m = X_{n_m,k_m}$ telle que la suite $(n_m)_{m\geq 1}$ est strictement croissante (en particulier $n_m \geq m$) et $\mu(Y_m) > 0$. Il est facile de vérifier que tous les Y_m sont disjoints. Posons

$$f = \sum_{m\geq 0} 2^{-m} (\mu(Y_m))^{-1/p} \mathbb{1}_{Y_m}.$$

Alors

$$\int_E f^p\,d\mu = \int_E \sum_{m\geq 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m}\,d\mu = \sum_{m\geq 0} 2^{-mp} < \infty,$$

et par ailleurs,

$$\int_E (fg)^p\,d\mu = \int_E \sum_{m\geq 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_n} g^p\,d\mu \geq \int_E \sum_{m\geq 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m} 2^{mp}\,d\mu = \sum_{m\geq 0} 1 = \infty.$$

On a donc construit une fonction $f \in \mathbb{L}^p$ telle que $fg \notin \mathbb{L}^p$ ce qui est impossible.

Autre approche (due à Quentin Guignard). Considérons l'application linéaire $\Phi : f \mapsto fg$ de $\mathbb{L}^p$ dans $\mathbb{L}^p$. Montrons que Φ est continue. Comme $\mathbb{L}^p$ est un espace de Banach, d'après le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que si $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} f$ et $\Phi(f_n) \xrightarrow{\mathbb{L}^p} h$, alors $h = \Phi(f)$. À cet effet, considérons une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ (ce qui implique $f_{\phi(n)} g \xrightarrow{\text{p.p.}} fg$) et $f_{\phi(n)} g = \Phi(f_{\phi(n)}) \xrightarrow{\text{p.p.}} h$. On en déduit immédiat que $fg = h$, c'est-à-dire que $h = \Phi(f)$.

Notons M la norme d'opérateur de Φ de sorte que $\|\Phi(f)\|_p \leq M\|f\|_p$ pour tout $f \in \mathbb{L}_p$. On suppose $M > 0$ (sinon on conclut facilement). Soit A un ensemble mesurable tel que $\mu(A) < \infty$ et appliquons l'inégalité précédente en prenant $f = \mathbb{1}_{|g|\geq 2M} \cdot \mathbb{1}_A$ (qui est dans $\mathbb{L}^p$ car $\mu(A) < \infty$) :

$$2M\mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p} \leq \|g\mathbb{1}_{|g|\geq 2M} \cdot \mathbb{1}_A\|_p \leq M\|\mathbb{1}_{|g|\geq 2M} \cdot \mathbb{1}_A\|_p = M\mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p}.$$

Ainsi, $2M\mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p} \leq M\mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p}$, ce qui implique que $\mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A) = 0$ et donc que $|g| \leq 2M$ sur A, μ-p.p. On conclut par σ–additivité.

□

Fin