TD 6 — Approximations

1 – Petite question

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ ?
2. On suppose maintenant que μ est finie et que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ ?

1 – Calculer en cent leçons

Exercice 1. (**Formule des compléments**) On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

1. Calculer la mesure image de la mesure
$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{\{x,y\geq 0\}}\,dx\,dy,$$
par l'application $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$.
2. En déduire la formule des compléments :
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2 – Approximations

Exercice 2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Exercice 3. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a,b[) \leq \nu(]a,b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien A.

Exercice 4. (Fonction de répartition d'un ensemble) Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda(]-\infty, x] \cap A)$ est continue.

Exercice 5. (✯– Théorème de Lusin) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Indication. On pourra commencer par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0,1]$.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 6. **(Spoiler : convolution inside)** Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, f = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (✯) Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On suppose que μ est de masse infinie et que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Est-ce que forcément $\mu(A) = \int_A g(x)dx$ pour tout borélien $A \in \mathbb{R}$?

Exercice 8. (✯) Trouver un espace topologique $\mathcal{T}$ et une mesure μ sur $(T, \mathcal{B}(T))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

Fin