TD 5 — Théorèmes de Fubini, calculs – Corrigé

0 – Exercices à préparer du TD 4

Exercice 1. (Partiel 2007) Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que f est intégrable. Étudier la convergence de la suite
$$I_n = n \int_E \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu$$
lorsque $n \to \infty$.
2. Même question losque $\int_E f\, d\mu = \infty$.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in E$, $n \ln(1 + f(x)/n) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$, et de plus, on a $n|\ln(1 + f/n)| d\mu \leq |f|$, qui est une fonction intégrale positive indépendante de n. D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \to \int_E f\, d\mu$.
2. D'après le lemme de Fatou,
$$\liminf_{n\to\infty} \int_E n \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu \geq \int_E f\, d\mu = \infty.$$
Ainsi $I_n \to \infty$.
Remarque. On peut aussi vérifier que $n \ln(1 + f/n)$ croît vers f quand $n \to \infty$, et appliquer, aussi bien pour a) que pour b), le théorème de convergence monotone.

□

Exercice 2.

1. Dans le lemme de Fatou, montrer que si l'on remplace $\liminf$ par $\limsup$, $f_n \geq 0$ par $f_n \leq 0$ et $\geq$ par $\leq$, le théorème reste vrai. Montrer en revanche, à l'aide de contre-exemples, qu'on ne peut pas se permettre d'en changer certains mais pas les autres.
2. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou.
3. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !
4. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-pp vers f. Supposons que $\int f_n d\mu \longrightarrow c < \infty$. Montrer que $\int f\, d\mu$ est définie est appartient à $[0, c]$ mais ne vaut pas nécessairement c.
6. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0,1]$, avec $0 \le f_n \le 1$, et telle que

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $[0,1]$.

Corrigé :

Tout d'abord, voici une tripotée d'exemples utiles :

La bosse glissante : $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$.

Le puits infini : $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

Pour les probabilistes : $(X_i)_{i\ge 1}$ une suite iid de Bernoulli $1/2$.

Le stroboscope infernal : f_n est un plateau de largeur $1/n$ que l'on fait glisser sur le segment $[0,1]$.

1. Pour la première partie, il suffit d'utiliser le lemme de Fatou avec $-f_n$ à la place de f_n. Pour les contre-exemples, choisir parmi la liste ci-dessus.
2. Choisir un contre-exemple parmi la liste ci-dessus.
3. Si on oublie la condition de domination : si on prend $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,n+1]}$, la conclusion reste vraie (autre exemple : $f_n(x) = -n$ si $-1/n < x < 0$, $f_n(x) = n$ si $0 < x < 1/n$ et 0 sinon) ; mais si on prend la bosse glissante la conclusion est mise en défaut. Si on oublie la convergence presque partout : voir question 6. pour un exemple où la conclusion demeure, mais si on prend $f_n(x) = \sin(n)$ sur $[0,1]$, la conclusion est mise en défaut.
4. Si on oublie la croissance : si on prend $f_n = \mathbb{1}_{\{n\}}$, la conclusion reste vraie, mais si on prend le puits infini, la conclusion est mise en défaut. Si on oublie la positivité : si on prend $f_n = -\mathbb{1}_{\{n\}}$, la conclusion reste vraie, mais si on prend $f_n(x) = -\frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,1/n[}(x)$, la conclusion est mise en défaut.
5. Prendre la bosse glissante.
6. Prendre le stroboscope infernal : $f_{n,k}(x) = \mathbb{1}_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}[}$ pour $1 \le k \le n$.

$\square$

1 – Petites questions

0) Expliquer pourquoi il n'y a pas de faute d'orthographe dans le titre du TD.

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = 0$ si $x = y = 0$.

   Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y)$ et $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y)$. Diabolique, non ?

2) En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dx\,dy$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$.

3) En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\,dy$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin(x)e^{-tx}\,dx.$$

Corrigé :

0) Deux théorèmes de Fubini ont été vus en cours, dont l'un spécifique aux fonctions à valeurs positives.

1) À x fixé, en remarquant que $y/(x^2+y^2)$ est une primitive de $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$, il vient :

$$\int_0^1 dy f(x,y) = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) = \frac{\pi}{4}$ et par symétrie $\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) = -\frac{\pi}{4}$. De ce fait le théorème de Fubini ne s'applique pas, car f n'est pas dans $\mathbb{L}^1([0,1]^2)$.

2) Notons $F(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ pour tout $x,y \geq 0$. On a, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{1+y}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2y}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{(1+y)}\frac{\pi}{2\sqrt{y}} = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\,du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\,dy\right)dx.$$

Or pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2-1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

3) Posons $G(x,y) = \cos(xy)\exp(-tx)$ pour $x \geq 0$, $y \in [0,1]$ et $t > 0$. On a $|G(x,y)| \leq \exp(-tx)$ et $(x,y) \mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} G(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}_+} \cos(xy)e^{-tx}\,dx\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\,dy \\
&= \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

□

2 – Théorèmes de Fubini

Exercice 3. **(Truc de ouf)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que

$$\text{pour } \lambda \text{ presque tout } y \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(\{x \in \mathbb{R}; f(x) = y\}) = 0.$$

Corrigé :

On écrit, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$\int_{\mathbb{R}} dy\lambda(\{x\in\mathbb{R};\, f(x)=y\}) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dxdy\mathbb{1}_{\{f(x)=y\}} = \int_{\mathbb{R}} dx\lambda(\{y\in\mathbb{R};\, f(x)=y\}) = \int_{\mathbb{R}} 0\cdot dx = 0.$$

Le résultat en découle, car une fonction positive d'intégrale nulle est presque partout nulle.

Autre solution : Pour $m,n\geq 1$, on note

$$A_{m,n} = \left\{y\in\mathbb{R};\, \lambda(\{f^{-1}(\{y\})\cap[-m,m]\}) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Il est facile de voir que $A_{m,n}$ est fini. Ainsi :

$$\{y\in\mathbb{R};\, \lambda(\{x\in\mathbb{R};\, f(x)=y\})>0\} = \bigcup_{m,n\geq 1} A_{m,n}$$

est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Ceci conclut. $\square$

Exercice 4. **(Quelque chose d'utile)** Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathcal{A},\mu)$, on considère $f:(E,\mathcal{A},\mu)\to(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable

1. Soit $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0)=0$. Montrer que

$$\int_E g\circ f\, d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f\geq t\})\, dt.$$

Indication : On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.

2. Montrer que $\int_E f\, d\mu = \int_0^\infty \mu\{f\geq t\}dt.$
3. On suppose que μ est finie et qu'il existe $p\geq 1$ et $c>0$ tels que pour tout $t>0$, $\mu(\{|f|>t\})\leq ct^{-p}$. Montrer que $f\in\mathbb{L}^q(E,\mathcal{A},\mu)$ pour tout $q\in[1,p[$. A-t-on forcément $f\in\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$?

Corrigé :

1. La fonction $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(0)=0$ donc pour tout $x\in E$ on a

$$g(f(x)) = \int_0^{f(x)} g'(s)\, ds.$$

On a donc

$$\int_E g\circ f\, d\mu = \int_E\int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\, ds\, d\mu(x).$$

Et la fonction $F:(x,s)\in E\times\mathbb{R}_+\mapsto g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}$ est positive. Donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives (Fubini-Tonelli), on a

$$\int_E g\circ f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\int_E \mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\, d\mu(x)\, ds = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\mu(\{f\geq s\})\, ds.$$

2. Application immédiate de la question précédente en prenant $g(x)=x$.

3. On applique la question 1. avec $|f|$ et $g(x) = x^q$ (pour passer de $\mu(\{|f| > t\})$ à $\mu(\{|f| \geq t\})$, on remarque qu'on peut remplacer $\{s \leq f(x)\}$ par $\{s < f(x)\}$ dans la solution de la question 1) :

$$\int_E |f|^q d\mu = q\int_0^\infty t^{q-1}\mu(\{|f| \geq t\})dt \leq q\mu(E) + cq\int_1^\infty t^{q-p-1}dt < \infty,$$

car $q-p-1 < -1$. En revanche, on n'a pas forchément $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$: prendre par exemple $f = t^{-1/p}$ sur $]0,1]$.

Remarque. Si $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, l'inégalité de Markov implique qu'il existe $c > 0$ telsque pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| > t\}) \leq ct^{-p}$.

□

3 – Calculs

Exercice 5.
1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\left(\int_E f_n d\mu\right) = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right) d\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}dx.$$

Corrigé :

1. D'après le théorème de convergence monotone, la fonction $\sum_{n\geq 0}|f_n|$ est intégrable. Cela implique que la fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ existe et est intégrable. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^N f_n\right| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n| \text{ et } \sum_{n=0}^N f_n \xrightarrow[N\to\infty]{\text{p.p.}} \sum_{n\geq 0} f_n.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^N f_n\right) d\mu \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right) d\mu.$$

Par ailleurs, pour tout $N \geq 0$,

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^N f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^N \int_E f_n \, d\mu.$$

Et $\int_E f_n d\mu$ est le terme général d'une série absolument convergente par hypothèse. En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient le résultat.

2. Pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \ln(x).$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n : x \in]0,1[\mapsto x^n \ln(x)$. Alors, par une intégration par parties, on obtient,

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = -\int_0^1 x^n \ln(x) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |f_n(x)|dx < +\infty$. On peut donc appliquer la question 1. et l'on trouve,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} x^n \ln(x)\right) dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Autre possibilité : Écrire $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$ et développer plutôt en série entière $\ln(1-x)$.

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = e^{-x}\frac{\sin(ax)}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x}\sin(ax).$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n : x \in]0,+\infty[\mapsto e^{-(n+1)x}\sin(ax)$. Alors, pour tout $x > 0$, $|f_n| \leq axe^{-(n+1)x}$, et

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^\infty |f_n(x)|dx \leq \sum_{n\geq 0}\int_0^\infty axe^{-(n+1)x}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

Ainsi, d'après la question 1.,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^\infty f_n(x)\,dx.$$

On a,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \left(e^{-(n+1)x}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right)dx &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(n+1)x - iax} - \frac{1}{(n+1)x+iax}\right)\\ &= \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{a}{n^2+a^2}.$$

□

Exercice 6. Soit $\varphi : ([0,1],\mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\,dx.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé :

1. On pose, pour tous $t \geq 0$ et $x \in [0,1]$, $f(x,t) = \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$. Pour tout $t \geq 0$, $f(x,t) \leq |\varphi(x)| + \sqrt{t}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. La fonction F est donc bien définie. De plus, pour tout $A > 0$ et pour tout $t \in [0,A]$, $f(x,t) \leq |\varphi(x)| + \sqrt{A}$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, F est continue sur tout ensemble de la forme $[0,A]$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est de plus dérivable par rapport à t en tout $t > 0$ et
$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2+t}}.$$
Soient $a > 0$ et $t \geq a$. On a alors
$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi, F est dérivable sur tout ensemble de la forme $[a,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2+t}}\,dx.$$

2. Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissant vers 0. On a

$$\frac{F(t_n)-F(0)}{t_n} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\varphi(x)^2+t_n}-|\varphi(x)|}{t_n}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)^2+t_n}+|\varphi(x)|}\,dx.$$

D'après le théorème de convergence monotone,

$$\frac{F(t_n)-F(0)}{t_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{2|\varphi(x)|}\,dx.$$

Ainsi, F est dérivable en 0 si et seulement si $1/|\varphi|$ est intégrable.

□

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 9. On définit une fonction $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ par

- $\mu(A) = 0$ si A est une partie finie ou dénombrable,
- $\mu(A) = +\infty$ sinon.

Soit K l'espace triadique de Cantor défini par $K = \left\{\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\right\}$. On rappelle que K est un compact de $[0,1]$, infini non-dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle. On pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x-y \in K\}$.

1. Vérifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,\mu(dy)\right)dx$ et $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx\right)\mu(dy)$. Conclure.

Corrigé :

1. L'ensemble vide $\varnothing$ est considéré comme fini donc $\mu(\varnothing)=0$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}$ disjointes finies ou dénombrables alors $\cup_{n\geq 0} A_n$ est finie ou dénombrable et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = 0 = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

Si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite dont au moins une des parties est infinie non-dénombrable alors $\cup_{n\geq 0} A_n$ est infinie non-dénombrable et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = +\infty = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

2. L'ensemble K est compact donc C est fermé. Ainsi $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3. On a
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,\mu(dy)\right)dx = \int_{\mathbb{R}} \mu(x-K)\,dx = +\infty,$$
car $x-K$ est non-dénombrable et
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx\right)\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K)\,dy = 0.$$
On a ici un exemple où le théorème de Fubini pour les fonctions positives s'applique pas, la mesure μ n'est pas σ-finie. □

□

Exercice 10. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$.

Corrigé :

1. Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 0} E_n$ et telle que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On note $D_n = \{x \in E_n : \mu(x) \geq 1/n\}$. Si D_n est infini alors il contient une suite $(y_m)_{m\geq 1}$ et
$$\mu(E_n) \geq \mu(D_n) \geq \mu(\{y_m, m \geq 1\}) = \sum_{m\geq 1} \mu(\{y_m\}) \geq \sum_{m\geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$
ce qui est impossible. On en déduit donc que D_n est fini. Puis $D = \cup_{n\geq 0} D_n$ est fini ou dénombrable.
2. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives on a
$$\begin{aligned}
\mu\otimes\nu(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\,\mu(dx)\nu(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\})\,\nu(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{x\in D_\mu} \mu(\{x\})\mathbb{1}_{\{x=y\}}\,\nu(dy)\\
&= \sum_{x\in D_\mu} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\})\mathbb{1}_{\{x=y\}}\,\nu(dy)\\
&= \sum_{x\in D_\mu\cap D_\nu} \mu(\{x\})\nu(\{x\})\\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).
\end{aligned}$$

□

Exercice 11. (La fonction Γ)
Pour tout $t > 0$ on pose
$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx.$$

1. Montrer que ceci définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$f_n : x \in]0,\infty[\mapsto 1_{]0,n[}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}.$$

Corrigé :

1. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x) = x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable donc Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $x > 0$, g est k-fois dérivable par rapport à t et

$$\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k} = (\ln(x))^k x^{t-1}e^{-x}.$$

Pour tous $A > a > 0$, $t \in [a,A]$ et $x > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}\right| \leq \left|(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}\right| \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} + \left|(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}\right| \mathbb{1}_{\{x<1\}},$$

et la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto |(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}|\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} + |(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}|\mathbb{1}_{\{x<1\}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout ensemble de la forme $[a,A]$ et ceci pour tout $k \geq 1$. On obtient donc le résultat.

2. On fixe $t > 0$. On voit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge p.p. vers $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ et de plus pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq x^{t-1}e^{-x}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx.$$

Or, en posant $u = x/n$, on a

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx = n^t \int_0^1 (1-u)^n u^{t-1}\,dt = n^t I_n(t).$$

On montre par une intégration par parties que $I_n(t) = (nI_{n-1}(t+1))/t$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit que

$$I_n(t) = \frac{n!}{t(t+1)\dots(t+n-1)} I_0(t+n) = \frac{n!}{t(t+1)\dots(t+n-1)(t+n)}.$$

□

Exercice 12. Soit $\varphi : ([0,1],\mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par

$$G(t) = \int_{[0,1]} |\varphi(x) - t|\,dx.$$

1. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est dérivable en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lambda(\{\varphi = t\}) = 0,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Corrigé :

1. Même méthode qu'à la question 1. de l'exercice 4.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = \int_0^1 \frac{|\varphi(x)-t-h|-|\varphi(x)-t|}{h}\,dx.$$

   Soit $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs décroissant vers 0. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\frac{|\varphi(x)-t-h_n|-|\varphi(x)-t|}{h_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[\varphi(x),+\infty[}(t) - \mathbb{1}_{]-\infty,\varphi(x)[}(t),$$

   et $|\varphi(x)-t-h_n|-|\varphi(x)-t| \leq h_n$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, la fonction G est dérivable à droite en t et

$$G'_d(t) = \lambda(\{\varphi \leq t\}) - \lambda(\{\varphi > t\}).$$

   De même, G est dérivable à gauche en t et

$$G'_g(t) = \lambda(\{\varphi < t\}) - \lambda(\{\varphi \geq t\}).$$

   Ainsi $G'_d(t) - G'_g(t) = \lambda(\{\varphi = t\})$ ce qui implique le résultat.

$\square$

Fin