TD 3 — Fonctions mesurables

1 – Petites questions

1) Soient (X,d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pourquoi f est-elle mesurable ?

2) Soient (X,d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables. Pourquoi la fonction $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est-elle mesurable ?

3) Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable ?

2 – Fonctions mesurables

Exercice 1. (Tribus image et réciproque) Soit $f : X \to Y$ une application. Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur X et $\mathcal{G}$ une tribu sur Y.

1. Montrer que $\{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y. Elle est appelée **tribu image par** f.
2. (a) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur X. On l'appelle **tribu engendrée par** f ou **tribu réciproque par** f et on la note parfois $\sigma(f)$.
   (b) Montrer que c'est la plus petite tribu sur X qui rende $f : X \to (Y,\mathcal{G})$ mesurable.
   (c) Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alexandra dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))$. A-t-elle raison ?
3. On supppose que $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que toute fonction $g : (X, \sigma(f)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable s'écrit $g = h \circ f$ avec $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
   Indication : commencer par le cas où g est étagée.
4. (Exemple.) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la tribu réciproque par f est $\sigma(f) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
5. Soient $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables, Y un ensemble, des fonctions $f_i : Y \to Y_i$ et $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$, i.e. la plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables. On la notera aussi $\sigma(f_i, i \in I)$.
   (a) Prouver que $\sigma(f_i, i\in I) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right)$.
   (b) Montrer que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $f_i \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 2. (Tribus produits) Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

On note $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques sur X et Y.

1. Prouver que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\pi_X, \pi_Y)$, autrement dit que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant π_X et π_Y mesurables.
2. Soit $f : (Z, \mathcal{C}) \to (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ une application. On écrit $f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$. Prouver que f est $(\mathcal{C}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable si et seulement f_X et f_Y sont respectivement $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ mesurables.
3. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pourra admettre que si $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i ;\ U_i, V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, I \text{ dénombrable.} \right\}$$

Exercice 3.

1. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}})_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ admette une limite finie est mesurable.

   Indication : Pensez au critère de ——.
2. (a) On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par $d(x, y) = \mathbb{1}_{x \neq y}$. Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et les boules fermées sont la tribu borélienne ?

   (b) ($\star$) Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $(f_n : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to X$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

   Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Exercice 4. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 5. (Théorème d'Egoroff) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) \leq \eta.$$

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.

3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E)=\infty$.

Exercice 6. Soient $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f:(E,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe un ensemble $A\in\mathcal{A}$ de mesure $\mu(A)>0$ tel que pour tous $x,y\in A$ on ait $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Exercice 7. Soit $C=C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de C et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de C rendant les applications de "projection" $f\mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Comparer les tribus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 8. (Mesure image)
Soient $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $(F,\mathcal{B})$ un espace mesurable et $f:E\to F$ une fonction mesurable. On rappelle que l'on définit sur $(F,\mathcal{B})$ une mesure ν_f appelée mesure image de μ par f par

$$\nu_f(B)=\mu(f^{-1}(B)),\ \ B\in\mathcal{B}.$$

Soit $\phi:F\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\displaystyle\int_F\phi(x)\nu_f(dx)=\int_E\phi(f(x))\mu(dx)$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 9. (Exemples et contre-exemples) Répondre aux questions suivantes, si la réponse est positive donner une démonstration, si la réponse est négative donner un contre-exemple. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue :

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il borné ?
2. Un borélien de mesure strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Un ouvert dense de $[0,1]$ a-t-il une mesure 1 ?
4. Deux compacts homéomorphes ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
5. ($\star$) Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0<\lambda(A\cap I)<\lambda(I)$?

Exercice 10. Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, on note $N(y)\in\overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x)=y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Exercice 11. ($\star$) Soit $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

On pourra admettre le résultat suivant (théorème de Lusin, prouvé ultérieurement) : si une fonction $g:([a,b],\mathcal{B}([a,b]))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, pour tout $\epsilon>0$, il existe un compact $K_\epsilon\subset[a,b]$ tel que $\mu([a,b]\cap K_\epsilon^c)\le\epsilon$ et la restriction de g à K est continue.

Fin