TD 3 — Fonctions mesurables – Corrigé

0 – Exercice du TD 2 à préparer

Exercice 0. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux sous-ensembles de $\mathbb{P}(\Omega)$ constitué d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables par intersections finies et que pour tous $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$: $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$. Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{A})$ et $V \in \sigma(\mathcal{B})$ on a : $\mu(U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V)$.

Corrigé :

Première étape. On introduit

$$G_1 = \{U \in \mathcal{F};\ \forall B \in \mathcal{B}, \mu(U \cap B) = \mu(U) \cdot \mu(B)\}.$$

G_1 est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$, qui est stable par intersections finies. Donc, d'après le théorème de la classe monotone, $\sigma(A) \subset G_1$.

Deuxième étape. On introduit

$$G_2 = \{V \in \mathcal{F};\ \forall U \in \sigma(A), \mu(U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V)\}.$$

G_2 est une classe monotone contenant $\mathcal{B}$ (d'après la première étape), qui est stable par intersections finies. Donc, d'après le théorème de la classe monotone, $\sigma(B) \subset G_2$, ce qui conclut. □

1 – Petites questions

1) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pourquoi f est-elle mesurable ?

2) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables. Pourquoi la fonction $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est-elle mesurable ?

3) Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable ?

Corrigé :

1) Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est ouvert (car f continue), donc mesurable. Comme l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ engendre la tribue borélienne, f^{-1} est continue.

Remarque. Plus généralement, pour montrer que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable, il suffit de montrer que $f^{-1}(C)$ est mesurable pour tout C appartenant à une ensemble de parties mesurables engendrant $\mathcal{B}$. En effet, $\{B \in \mathcal{B};\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu. Ainsi, si elle contient une partie $\mathcal{C}$, elle contient alors $\sigma(\mathcal{C})$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2) Comme $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_n$, il suffit de montrer que $\sup_{n\geq 1} f_n$ et $\inf_{n\geq 1} f_n$ sont mesurables. Faisons le pour $\sup_{n\geq 1} f_n$ (l'autre cas étant similaire, ou bien se fait en considérant $-f_n$) en appliquant la remarque précédente (rappelons que $\{]a,\infty[; a\in\mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) : il suffit de montrer que pour tout $a>0$, $\{x; \sup_{n\geq 1} f_n(x)>a\}$ est mesurable. Ceci découle de l'écriture :

$$\left\{x; \sup_{n\geq 1} f_n(x)>a\right\} = \bigcup_{n\geq 1}\{x; f_n(x)>a\}.$$

C'est un ensemble mesurable, étant une union dénombrable d'ensembles mesurables (car $\{x; f_n(x)>a\} = f_n^{-1}(]a,\infty[)$ est mesurable, f_n étant mesurable).

Remarque. En toute rigueur, comme $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est à valeurs dans $\overline{R}$, il faut montrer que $\limsup_{n\to\infty} f_n : X\to(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable. Pour cela, on fait la même chose en se rappelant que les boréliens de $\overline{R}$ sont les boréliens de $\mathbb{R}$ auxquels on ajoute éventuellement $+\infty$ et/ou $-\infty$, et que $\{]a,\infty]; a\in\mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{R})$.

3) Pour $x\in]0,1[$,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n},$$

ainsi f' est mesurable comme une limite simple de fonctions mesurables. □

2 – Fonctions mesurables

Exercice 1. (Tribus image et réciproque) Soit $f : X\to Y$ une application. Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur X et $\mathcal{G}$ une tribu sur Y.

1. Montrer que $\{B\subset Y; f^{-1}(B)\in\mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y. Elle est appelée **tribu image par** f.
2. (a) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B), B\in\mathcal{G}\}$ est une tribu sur X. On l'appelle **tribu engendrée par** f ou **tribu réciproque par** f et on la note parfois $\sigma(f)$.
   (b) Montrer que c'est la plus petite tribu sur X qui rende $f : X\to(Y,\mathcal{G})$ mesurable.
   (c) Soit $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(Y)$. Alexandra dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))$. A-t-elle raison ?
3. On supppose que $f : X\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que toute fonction $g : (X,\sigma(f))\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable s'écrit $g = h\circ f$ avec $h : (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
   Indication : commencer par le cas où g est étagée.
4. (Exemple.) Soit $f : \mathbb{R}\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la tribu réciproque par f est $\sigma(f) := \{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), A=-A\}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R},\sigma(f))$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
5. Soient $(Y_i,\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables, Y un ensemble, des fonctions $f_i : Y\to Y_i$ et $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$, i.e. la plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables. On la notera aussi $\sigma(f_i, i\in I)$.
   (a) Prouver que $\sigma(f_i, i\in I) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right)$.
   (b) Montrer que $f : (X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$ est mesurable si, et seulement si, pour tout $i\in I$, $f_i\circ f : (X,\mathcal{A})\to(Y_i,\mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Corrigé :

1. Il s'agit d'une simple vérification des trois points de la définition d'une tribu.
2. (a) Il s'agit d'une simple vérification des trois points de la définition d'une tribu.

(b) Il eſt clair que $\sigma(f)$ rend f mesurable (car pour tout $B \in \mathcal{G}$, on a bien $f^{-1}(B) \in \sigma(f)$). D'autre part, toute tribu rendant f mesurable contient $\sigma(f)$, car elle doit contenir les ensembles de la forme $f^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{G}$. Le résultat s'ensuit.

(c) Alexandra a raison. Montrons la double inclusion. Tout d'abord, il eſt clair que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, ce qui implique que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. Ensuite, notons

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}.$$

Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on en déduit que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ eſt une tribu. Il s'ensuit que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, ce qui clôt la preuve.

3. Soit $g : (X, \sigma(f)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et étagée, $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \sigma(f)$. Comme A_i appartient à la tribu réciproque de f, il exiſte $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A_i = f^{-1}(B_i)$. Et donc

$$g = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{B_i}}_{\text{mesurable } (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))} \circ f.$$

Traitons maintenant le cas général : g s'écrit comme limite simple de fonctions étagées $g = \lim e_n$. Donc si l'on écrit $e_n = h_n \circ f$ on obtient $g = \lim h_n \circ f$ avec $h_n : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Si l'on pose

$$h(x) = \begin{cases} \lim h_n(x) \text{ quand la limite exiſte,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Mais $h = \mathbb{1}_{|\limsup_{n\to\infty} h_n| < \infty} \limsup_{n\to\infty} h_n$ eſt mesurable comme produit de fonctions mesurables, et de plus $g = h \circ f$.

4. (a) Ceci provient aisément du fait que $f^{-1}(A) = \sqrt{A \cap \mathbb{R}_+} \cup (-\sqrt{A \cap \mathbb{R}_+})$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) D'après la queſtion 3. ce sont les fonctions de la forme $f(x^2)$ avec $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

5. (a) La plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables contient forcément $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$, de sorte que

$$\sigma(f_i; i \in I) \supset \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right).$$

Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que $\sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right)$ rend mesurables les f_i.

(b) Tout d'abord, si $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ eſt mesurable, alors $f_i \circ f$ eſt mesurable comme composée de fonctions mesurables.

Réciproquement, supposons que toutes les fonctions $f_i \circ f$ soient mesurables. D'après la question précédente, pour montrer que f eſt mesurable, il suffit de montrer que si $B \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Soit donc $B \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$. Il exiſte donc $i \in I$ et $B_i \in \mathcal{B}_i$ tels que $B = f_i^{-1}(B_i)$. Mais alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(f_i^{-1}(B_i)) = (f \circ f_i)^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$, ce qui conclut.

□

Exercice 2. (Tribus produits) Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$. On note $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques sur X et Y.

1. Prouver que $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\sigma(\pi_X,\pi_Y)$, autrement dit que $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant π_X et π_Y mesurables.
2. Soit $f:(Z,\mathcal{C})\to(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ une application. On écrit $f(z)=(f_X(z),f_Y(z))$. Prouver que f est $(\mathcal{C},\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ mesurable si et seulement f_X et f_Y sont respectivement $(\mathcal{C},\mathcal{A})$ et $(\mathcal{C},\mathcal{B})$ mesurables.
3. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pourra admettre que si $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)=\left\{\bigcup_{i\in I}U_i\times V_i;\ U_i,V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, I \text{ dénombrable.}\right\}$$

Corrigé :

1. D'après la question 5(a) de l'exercice 2, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\sigma(\{A\times Y,X\times B\},A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B})$. Il est clair que

$$\sigma(\{A\times Y,X\times B\},A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B})\subset\sigma(\{A\times B,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}).$$

Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que pour $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$ on a $A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)$.
2. C'est une conséquence de la question 5(b) de l'exercice 2.
3. On établit la double inclusion. Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour tous ouverts O,O' de $\mathbb{R}$, $O\times O'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, considérons la classe G_1 définie par :

$$G_1=\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R});\ A\times B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ pour tout ouvert } B \text{ de } \mathbb{R}\}.$$

Il est facile de voir que G_1 est une tribu. Comme G_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$, $G_1=\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ensuite, on considère la classe G_2 définie par :

$$G_2=\{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R});\ A\times B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ pour tout } A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Il est facile de voir que G_2 est une tribu. D'après ce qu'on a fait précédemment, G_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}$, et donc $G_2=\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi,$\mathcal{F}\times\mathcal{G}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. En effet, rappelons que par définition $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G};\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Réciproquement, montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$. D'après le résultat admis, comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$, il suffit de montrer que si I est dénombrable et U_i,V_i ($i\in\mathbb{R}$) sont des ouverts de $\mathbb{R}$, alors

$$\bigcup_{i\in I}U_i\times V_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ceci est clairement le cas, car $U_i,V_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et I est **dénombrable**.

Remarque. Cette preuve montre que $\mathcal{B}(X\times Y)=\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$ lorsque X et Y sont deux espaces métriques à base dénombrable d'ouverts (ou, de manière équivalente, s'ils sont séparables).

□

Exercice 3.

1. Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n:E\longrightarrow\overline{\mathbb{R}})_{n\geq1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n\geq1}$ admette une limite finie est mesurable.

   Indication : Pensez au critère de ——.
2. (a) On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par $d(x,y)=\mathbb{1}_{x\neq y}$. Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et les boules fermées sont la tribu borélienne ?

(b) ($\star$) Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $(f_n : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to X$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Corrigé :

1. Écrivons le critère de Cauchy :

$$\begin{aligned}
(f_n(x)) \text{ converge} &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \\
(f_n(x)) \text{ converge} &\iff x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n,m\geq N} \{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\} \right) \right)
\end{aligned}$$

L'ensemble $\{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$ est bien mesurable puisque f_n et f_m sont mesurables. Il reste encore un problème, on a seulement le droit de faire des unions et intersections dénombrables d'ensemble mesurables : on ne peut pas faire l'intersection pour tous les $\varepsilon > 0$, mais on peut prendre une suite ε_k qui converge vers 0. Plus précisément :

$$(f_n(x)) \text{ converge} \iff x \in \bigcap_{k>0} \left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n,m\geq N} \left\{ x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2^k} \right\} \right) \right).$$

2. (a) La tribu borélienne est la discrète de toutes les parties de $\mathbb{R}$. En revanche, les tribus engendrées par les boules ouvertes ou fermées sont la tribu $\{A \subset \mathbb{R}; A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$, qui est ainsi différente de la tribu borélienne.

   (b) Il suffit de montrer que $f^{-1}(F)$ est mesurable pour tout fermé F (cf la remarque des petites questions). On rappelle que la distance à un fermé est une application 1-lipschitzienne (c'est-à-dire que $x \to d(x, F)$ est 1-lipschitzienne) et que $x \in F$ ssi $d(x, F) = 0$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(F) &= \{x \in X; d(f(x), F) = 0\} = \left\{ x \in X; \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), F) = 0 \right\} \\
&= \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left\{ x \in X; d(f_n(x), F) \leq \frac{1}{p} \right\},
\end{aligned}$$

qui est mesurable comme unions et intersections dénombrables d'ensembles mesurables. En effet, $x \to d(f_n(x), F)$ est mésurable, étant la composée de la fonction mesurable f_n par la fonction 1-lipschitzienne $y \to d(y, F)$ (donc continue, donc mesurable).

ATTENTION : Il ne suffit pas de montrer que les images réciproques des boules (ouvertes ou fermées) sont mesurables. En effet, ce n'est que dans un espace métrique séparable qu'on peut affirmer que la tribu engendrée par les boules est la tribu borélienne (cf question a)).

$\square$

Exercice 4. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Corrigé :

a) Soit $A_n = \{|f| \le n\}$ (de manière plus formelle, $A_n = \{x; |f(x)| \le n\}$), qui est mesurable. Il est clair que A_n est une suite croissante d'ensembles et que $\cup_{n\ge 1} A_n = X$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\ge 1} A_n\right) = \mu(X) > 0.$$

Il existe donc $n \ge 1$ tel que $\mu(A_n) > 0$, ce qui conclut.

b) Soit $A_n = \{|f| \ge 1/n\}$ (de manière plus formelle, $A_n = \{x; |f(x)| \ge 1/n\}$), qui est mesurable. Il est clair que A_n est une suite croissante d'ensembles et que $\cup_{n\ge 1} A_n = \{f \ne 0\}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\ge 1} A_n\right) = \mu(\{f \ne 0\}) > 0.$$

Il existe donc $n \ge 1$ tel que $\mu(A_n) > 0$, ce qui conclut.

□

Exercice 5. (Théorème d'Egoroff) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\ge 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \ge 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \ge 1$ tel que $\mu\left(\bigcup_{j\ge n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \le \eta$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \le \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.
3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Corrigé :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\ge 1}$ converge μ-p.p. vers f ce qui implique que pour tout $k \ge 1$,

$$\mu\left(\bigcap_{n\ge 1}\bigcup_{j\ge n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Pour tout $k \ge 1$, la suite $(\bigcup_{j\ge n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\})_{n\ge 0}$ est décroissante pour l'inclusion et $\mu(E) < \infty$ donc

$$\mu\left(\bigcap_{n\ge 1}\bigcup_{j\ge n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j\ge n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j\ge n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

et l'on obtient le résultat.

2. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question (1), pour tout $k \ge 1$, on peut trouver $n_k \ge 0$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{j\ge n_k}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \le 2^{-k}\varepsilon.$$

Posons $A = \bigcup_{k\ge 1}\bigcup_{j\ge n_k}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}$. Alors $\mu(A) \le \varepsilon$ et sur $E \setminus A$, $f_n \to f$ uniformément quand $n \to \infty$.

3. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} = (\mathbb{1}_{[-n,n]})_{n\geq 1}$. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure finie tel que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge sur B uniformément vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Alors $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$, ce qui implique que $\mathbb{R} \setminus B$ contient des réels arbitrairement grands en valeur absolue et donc qu'on ne peut pas avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus B$. Le théorème d'Egoroff ne peut donc pas être démontré si l'on ne suppose pas $\mu(E) < \infty$.

□

Exercice 6. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Corrigé :

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = f^{-1}(]r - \varepsilon/2, r + \varepsilon/2[)$. La fonction f étant mesurable, chaque ensemble A_r est mesurable. De plus, $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r = f^{-1}(\mathbb{R}) = E$. Supposons que $\mu(A_r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Alors $\mu(E) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mu(A_r) = 0$. Or $\mu(E) > 0$. Donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu(A_{r_0}) > 0$. De plus $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in A_{r_0}$. □

Exercice 7. Soit $C = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de C et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de C rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Comparer les tribus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Corrigé :

L'ensemble C est muni de la topologie de la convergence uniforme. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $f \in C \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est continue et donc mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_1$. On en déduit l'inclusion $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$. Montrons réciproquement que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Soit une fonction $f_0 \in C$ fixée. Pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, l'application $f \in C \mapsto |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$. Donc l'application $f \in C \mapsto \sup_{x\in\mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$ car c'est un sup dénombrable de fonctions mesurables. Or $\|f - f_0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$. Ainsi la fonction $f \in C \mapsto \|f - f_0\|_\infty$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$ ce qui implique que toutes les boules ouvertes de C sont mesurables par rapport à $\mathcal{C}_2$. L'espace C étant séparable, tous les ouverts de C sont donc mesurables par rapport à $\mathcal{C}_2$. □

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 9. (Exemples et contre-exemples) Répondre aux questions suivantes, si la réponse est positive donner une démonstration, si la réponse est négative donner un contre-exemple. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue :

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il borné ?
2. Un borélien de mesure strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Un ouvert dense de $[0, 1]$ a-t-il une mesure 1 ?
4. Deux compacts homéomorphes ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
5. (★) Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Corrigé :

1. Non, par exemple $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n-1/2^n, n+1/2^n[$.
2. Non, l'ensemble $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ est de mesure 1 et est d'intérieur vide.
3. Non, cf TD précédent : si on numérote $(q_n)_{n\geq 1}$ tous les rationnels de $[0,1]$, et qu'on construit $A_\varepsilon = \bigcup_n]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[$ on obtient un ouvert de mesure inférieure à 2ε et dense (puisqu'il contient tous les rationnels).
4. Non (facile). Oui, les espaces de Cantor sont tous homéomorphes, et certains sont de mesure nulle, d'autres non (voir TD1).
5. Oui, mais il n'est pas facile à construire : il faut prendre un ensemble de Cantor de mesure non nulle, puis dans chaque trou glisser un ensemble de Cantor plus petit, etc.

□

Exercice 10. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, on note $N(y)\in\overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x)=y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Corrigé :

L'équation $f(x)=y$ possède une solution dans $[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[$ si $y\in f([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)$. Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)$ est un intervalle et est donc mesurable. Ainsi la suite de fonctions

$$N_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{y\in f([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)} + \mathbf{1}_{y=f(1)},$$

est mesurable est tend en croissant vers N qui est donc mesurable. □

Exercice 11. (★) Soit $f : (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

On pourra admettre le résultat suivant (théorème de Lusin, prouvé ultérieurement) : si une fonction $g : ([a,b],\mathcal{B}([a,b])) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, pour tout $\epsilon>0$, il existe un compact $K_\epsilon\subset[a,b]$ tel que $\mu([a,b]\cap K_\epsilon^c)\leq\epsilon$ et la restriction de g à K est continue.

Corrigé :

Il est clair que $f(0)=0$. Il suffit de prouver que f est continue en 0 (f sera alors continue sur tout $\mathbb{R}$ et donc linéaire). Soit $\epsilon>0$. D'après le théorème de Lusin, il existe un compact $K\subset[0,1]$ tel que $\mu(K)>2/3$ et sur lequel f est continue. Puisque f est alors uniformément continue sur K, il existe $\delta\in(0,1/3)$ tel que $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ dès que $|x-y|\leq\delta$. Soit $h\in(0,\delta)$. Alors les ensembles K et $K-h=\{x-h;\, x\in K\}$ ne sont pas disjoints. En effet, dans le cas contraire, on aurait :

$$1+h=\mu([-h,1])\geq\mu(K\cup(K-h))=\mu(K)+\mu(K-h)>4/3,$$

ce qui contredit le fait que $h<\delta<1/3$. Il existe donc $x_0\in K\cap(K-h)$, ce qui implique que $|f(x_0)-f(x_0+h)|<\epsilon$, et donc $|f(h)|<\epsilon$. □

Fin