TD 2 — Tribus, mesures

1 – Petites questions

1) Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu ?
2) Si on note λ la mesure de Lebesgue, rappeler pourquoi $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}} 0 = 0.$$

Où est le problème ?
3) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu ?
4) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites de nombres réels, a-t-on toujours

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n?$$

Et si les deux suites sont bornées ? Et si b_n converge ?

2 – Mesures

Exercice 1. (Lemme de Borel-Cantelli) $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On rappelle que l'on note

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1. Montrer que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)\ ,$$

   et que si $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)\ .$$

   Qu'est-ce qui se passe si $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \infty$?
2. (Lemme de Borel-Cantelli.) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. (Une application du lemme de Borel-Cantelli.) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$
i.e. presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$".

Exercice 2. (Mesure sur $\mathbb{Z}$) Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

3 – Tribus

Exercice 3. (Opérations sur les tribus)

1. Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.
2. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
3. On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.
4. (Partiel 2010) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Alexandra dit : alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-elle raison ?
5. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alexandra dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. A-t-elle raison ?

Exercice 4. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4 – Divers

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue)
$$\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon.$$
2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:
$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geq \lambda(A) - \epsilon.$$

Exercice 6. (Ensembles de Cantor)
Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.
3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que

$$K_3 = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \; ; \; (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

et qu'il est mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable tel que $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{A}$. On dit que μ est portée par $S \in \mathcal{A}$ si $\mu(S^c) = 0$, que $\omega \in \Omega$ est un atome ponctuel pour μ si $\mu(\{\omega\}) \neq 0$, que μ est diffuse si elle n'a pas d'atomes ponctuels, que μ est purement atomique si elle est portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.

1. Donner des exemples de mesures diffuses et de mesures purement atomiques.
2. Que peut-on dire d'une mesure qui est diffuse et purement atomique ?
3. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe une mesure diffuse μ_d et une mesure purement atomique μ_a sur $\mathcal{A}$ telles que $\mu = \mu_d + \mu_a$.
4. Montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une mesure σ-finie μ est dénombrable.

5 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$ constitué d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables par intersections finies et que pour tous $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{A})$ et $V \in \sigma(\mathcal{B})$ on a :

$$\mu(U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V).$$

6 – Compléments (hors TD)

Exercice 9. ("Cardinal" d'une tribu) Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathcal{A}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par,

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} \,:\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de question 3 de l'exercice 3.

Exercice 10. (Support) Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \mu(\mathrm{B}(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)

Exercice 11. ($\star$ – Mesure atomique) Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0,1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0,1]$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = t$).

Exercice 12. (Un problème d'additivité)
On note $l^\infty = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.
   On admet (théorème de Hahn-Banach) qu'il existe une forme linéaire $F : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui satisfait les deux propriétés suivantes : Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$
   — $F(\mathbf{a}) \leq \|\mathbf{a}\|_\infty$,
   — Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ existe alors $F(\mathbf{a}) = \alpha$.
2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $\mathbf{1}_A \in l^\infty$ définie par $\begin{cases} \mathbf{1}_A(n) = 1, \text{ si } n \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Si $\mathrm{P}(A) = F(\mathbf{1}_A)$, montrer que
   — $\mathrm{P}(\emptyset) = 0, \mathrm{P}(\mathbb{N}) = 1$,
   — $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$,
   — $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.
3. Montrer que P n'est pas une mesure.

Exercice 13. ($\star$) Est-ce que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ pour tous espaces métriques X, Y ?

Fin