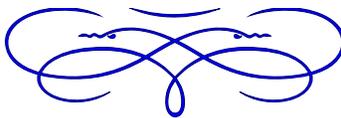


TD 2 — Tribus, mesures – **Corrigé****0 – Exercice du TD 1 à préparer**

Exercice 0. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E; f(x) \geq n\}, \quad B_{n,i} = \{x \in E; i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose $f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{B_{n,i}} + n \mathbb{1}_{A_n}$. Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

Corrigé :

La suite $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$. En effet, si $x \in B_{n,i}$, on vérifie que

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } \frac{2i}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i+1}{2^{n+1}} \\ f_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{2i+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(i+1)}{2^{n+1}}, \end{cases}$$

et que si $x \in A_n$ alors

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } f(x) \geq n+1 \\ \frac{n2^{n+1}+l}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{n2^{n+1}+l}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{n2^{n+1}+l+1}{2^{n+1}}; 0 \leq l \leq 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Il en découle que la suite $f_n(x)$ est croissante.

D'autre part, par construction, si $x \in \{f < n_0\}$ alors $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ pour $n \geq n_0$. On en déduit que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ lorsque $x \in \{f < +\infty\} = \cup_{k \geq 1} \{f < k\}$.

D'autre part, si $x \in \{f = +\infty\} = \cap_{k \geq 1} \{f \geq k\}$, alors $f_n(x) = n \rightarrow +\infty$.

Remarque. Si $f \leq M$, alors $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ pour $n \geq M$ et la convergence est uniforme. \square

1 – Petites questions

- 1) Est-ce que l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} est une tribu ?
- 2) Si on note λ la mesure de Lebesgue, rappeler pourquoi $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V4.

Où est le problème ?

3) Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu ?

4) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites de nombres réels, a-t-on toujours

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n ?$$

Et si les deux suites sont bornées ? Et si b_n converge ?

Corrigé :

1) Non, car le complémentaire de $] -\infty, 0[$ n'est pas ouvert.

2) Non, pas toujours. Par exemple si, en notant $\Omega = \{1, 2, 3\}$, on prend $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$? En effet, on a alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \Omega\}$, qui n'est pas stable par union ($\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$).

3) On a $\lambda(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([x - 1/n, x + 1/n]) = 0$. Par ailleurs l'égalité $\lambda(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\})$ n'est pas vérifiée car \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

4) Ce n'est pas toujours vrai (prendre par exemple $a_n = -b_n = n$). En revanche, le terme de gauche est inférieur ou égal au terme de droite lorsque les deux suites sont bornées, et l'égalité est vérifiée lorsque b_n converge. □

2 – Mesures

Exercice 1. (Lemme de Borel-Cantelli) (E, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} . On rappelle que l'on note

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

1. Montrer que

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

et que si $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) < \infty$, alors

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Qu'est-ce qui se passe si $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \infty$?

2. (Lemme de Borel-Cantelli.) On suppose que $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0.$$

3. (Une application du lemme de Borel-Cantelli.) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

i.e. presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$ ".

Corrigé :

1. On remarque que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $k \geq n$,

$$\mu\left(\bigcap_{p \geq n} A_p\right) \leq \mu(A_k).$$

Ainsi,

$$\mu\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \inf_{k \geq n} \mu(A_k). \quad (1)$$

Or la suite $(\bigcap_{k \geq n} A_k)_{n \geq 0}$ est croissante. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (1). De même, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \geq \sup_{k \geq n} \mu(A_k). \quad (2)$$

Or la suite $(\bigcup_{k \geq n} A_k)_{n \geq 0}$ est décroissante et $\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) < +\infty$. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (2). On peut aussi utiliser le résultat précédent et raisonner en passant au complémentaire. En effet, posons $F = \bigcup_{n \geq 0} A_n$. On a alors

$$F \setminus \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (F \setminus A_n).$$

Donc,

$$\mu\left(F \setminus \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F \setminus A_n),$$

c'est-à-dire,

$$\mu(F) - \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \mu(F) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Comme $\mu(F) < \infty$, cela implique le résultat.

2. On a, pour tout $n \geq 0$,

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k).$$

Or $\mu(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) \leq \mu(\bigcup_{k \geq n} A_k)$ pour tout $n \geq 0$ et $\sum_{k \geq n} \mu(A_k)$ est le reste d'une série convergente et donc tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. On obtient ainsi le résultat.

3. Pour tout $q \geq 1$, on note

$$A_q = [0, 1] \cap \bigcup_{p=0}^q \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \right].$$

Ainsi, $\lambda(A_q) \leq 2/q^{1+\varepsilon}$. Par conséquent,

$$\sum_{q \geq 1} \lambda(A_q) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $\lambda(\limsup_{q \rightarrow \infty} A_q) = 0$, or l'ensemble $\limsup_{q \rightarrow \infty} A_q$ contient l'ensemble des réels bien approchables par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$. Voir

http://en.wikipedia.org/wiki/Thue-Siegel-Roth_theorem

□

Exercice 2. (Mesure sur \mathbb{Z}) Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Corrigé :

Oui, mais seulement la mesure nulle. En effet, soit μ une mesure non nulle de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation. Comme μ est non nulle, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c := \mu(\{n\}) > 0$. Par invariance par translation, il vient $\mu(\{k\}) = c$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors, comme \mathbb{Z} est dénombrable :

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu(\cup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(\{k\}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c = \infty,$$

ce qui contredit le fait que μ est de masse finie. □

3 – Tribus

Exercice 3. (Opérations sur les tribus)

1. Soit \mathcal{F} une tribu de Ω et B un élément de \mathcal{F} . Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B .
2. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \rightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
3. On considère sur \mathbb{N} , pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.
4. (Partiel 2010) Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soit \mathcal{C} une famille de parties de E , et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Alexandra dit : alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-elle raison ?
5. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alexandra dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. A-t-elle raison ?

Corrigé :

1. — $B = \Omega \cap B \in \mathcal{F}_B$,
— Soit $C = B \cap D \in \mathcal{F}_B$ avec $D \in \mathcal{F}$. Alors $D^c \in \mathcal{F}$ et $C_B^c = B \cap D^c$ appartient à \mathcal{F}_B .
— Soit $C_n = B \cap D_n \in \mathcal{F}_B$ avec $D_n \in \mathcal{F}$. Alors $\bigcup_n D_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcup_n C_n = B \cap \bigcup_n D_n$ appartient à \mathcal{F}_B .
L'ensemble \mathcal{F}_B est donc bien une tribu sur B .
2. On considère pour $X = Y = \{0, 1\}$ la tribu \mathcal{F} engendré par l'élément $(0, 0) \in X \times Y$. Il est clair que

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X \times Y, \{(0, 0)\}, X \times Y \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

On vérifie que $\mathcal{F}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, ce qui n'est pas une tribu.

3. Posons

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n,$$

et supposons que \mathcal{F} soit une tribu. On a

$$\{2n\} \in \mathcal{F}_{2n} \subset \mathcal{F} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 0} \{2n\}.$$

Ainsi, $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}_{n_0}$. Or, les seuls éléments de cardinal infini de \mathcal{F}_{n_0} sont de la forme $\mathbb{N} \setminus A$, où A est une partie de $\{0, 1, \dots, n_0\}$. On obtient donc une contradiction.

4. Alexandra a raison. En effet, soit $\mathcal{G} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}); \exists \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \text{ dénombrable tel que } B \in \sigma(\mathcal{D})\}$. Montrons que \mathcal{G} est une tribu.

Il est clair que $E \in \mathcal{G}$.

Si $A \in \mathcal{G}$, alors il existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A \in \sigma(\mathcal{D})$, et donc $A^c \in \sigma(\mathcal{D})$: on a $A^c \in \mathcal{G}$.

Si $(A_n) \subset \mathcal{G}$, alors pour tout n il existe $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n)$, et donc $\cup_n A_n \in \sigma(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D} := \cup_n \mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ est dénombrable (étant une union dénombrable d'ensembles dénombrables) : on a $\cup_n A_n \in \mathcal{G}$.

En conclusion, \mathcal{G} est une tribu.

Or $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, ce qui implique que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C})$, d'où le résultat.

5. Ceci sera revu lors du TD 3.

□

Exercice 4. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé :

On fera cet exercice lors du TD 3.

□

4 – Divers

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de \mathbb{R} de mesure (de Lebesgue)

$$\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon.$$

2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geq \lambda(A) - \epsilon.$$

Corrigé :

1. Soit $\epsilon > 0$. Notons $\mathbb{Q} = \{q_n, n \geq 1\}$ les rationnels et posons :

$$O_\epsilon = \bigcup_{n \geq 1}]q_n - \epsilon 2^{-n-1}, q_n + \epsilon 2^{-n-1}[.$$

Alors O_ϵ est un ouvert de \mathbb{R} , dense (car il contient \mathbb{Q}). De plus,

$$\lambda(O_\epsilon) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda(]q_n - \epsilon 2^{-n-1}, q_n + \epsilon 2^{-n-1}[) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \epsilon < \epsilon.$$

2. Posons $F_\epsilon = O_\epsilon^c$. Alors F_ϵ est un fermé de \mathbb{R} d'intérieur vide. De plus, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap F_\epsilon) + \lambda(A \cap O_\epsilon) \leq \lambda(A \cap F_\epsilon) \leq \lambda(A \cap F_\epsilon) + \epsilon.$$

□

Exercice 6. (Ensembles de Cantor)

Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0, 1[$, et soit $K_0 = [0, 1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n , qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K .
3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n . Vérifier que

$$K_3 = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} ; (a_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

et qu'il est mesure de Lebesgue nulle.

Corrigé :

1. Chaque ensemble K_n est fermé donc K est fermé. De plus, $K \subset [0, 1]$ donc K est compact. Montrons que l'on peut construire une bijection $\varphi : K \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Si x est dans K , alors x est dans un des deux intervalles composant K_1 . On pose $\varphi(x)_0 = 0$ si x est dans l'intervalle de gauche et $\varphi(x)_0 = 1$ si x est dans l'intervalle de droite. En répétant ce procédé, on construit une suite $\varphi(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que φ est une bijection. Ainsi, K n'est pas dénombrable. Par construction de φ , pour tous $x, y \in K$ et $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_{n+1} si et seulement si $\varphi(x)_k = \varphi(y)_k$ pour tout $k \leq n$. Supposons qu'il existe un intervalle I de $[0, 1]$ inclus dans K et non réduit à un point. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Alors, pour tout $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_n donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ ce qui est absurde. Ainsi, K est d'intérieur vide. Enfin, soit $x \in K$. L'ensemble $\{y \in K : \varphi(y)_k = \varphi(x)_k \forall k \leq n\}$ est infini et est constitué de points de K tous à distance au plus $1/2^{n+1}$ de x . Donc x est un point d'accumulation.
2. On montre par récurrence que $\lambda(K_n) = (1-d_0) \dots (1-d_{n-1})$. Or $\lambda([0, 1]) = 1$ donc $\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n)$. On a donc :

$$\sum_{n \geq 0} d_n < \infty \Rightarrow \lambda(K) = \prod_{n \geq 0} (1 - d_n),$$

$$\sum_{n \geq 0} d_n = \infty \Rightarrow \lambda(K) = 0.$$

3. Il suffit de regarder la bijection construite dans la question 1 entre K et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et vérifier que si $x = \varphi((b_n)_n)$, alors $x = \sum \frac{2b_n}{3^n}$. Pour la mesure on utilise la question 2.

□

Exercice 7. Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable tel que $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit μ une mesure positive sur \mathcal{A} . On dit que μ est portée par $S \in \mathcal{A}$ si $\mu(S^c) = 0$, que $\omega \in \Omega$ est un atome ponctuel pour μ si $\mu(\{\omega\}) \neq 0$, que μ est diffuse si elle n'a pas d'atomes ponctuels, que μ est purement atomique si elle est portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.

1. Donner des exemples de mesures diffuses et de mesures purement atomiques.
2. Que peut-on dire d'une mesure qui est diffuse et purement atomique ?
3. Soit μ une mesure positive sur \mathcal{A} . Montrer qu'il existe une mesure diffuse μ_d et une mesure purement atomique μ_a sur \mathcal{A} telles que $\mu = \mu_d + \mu_a$.
4. Montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une mesure σ -finie μ est dénombrable.

Corrigé :

1. La mesure de Lebesgue est diffuse, et la mesure de comptage sur \mathbb{N} est purement atomique.

2. Elle est alors portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels, qui est vide car elle est diffuse. Cette mesure est donc nulle.
3. Soit D l'ensemble des atomes ponctuels de μ . Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu_d(A) = \mu(A \cap D^c)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap D)$. Ainsi μ_d est diffuse, μ_a est atomique et $\mu = \mu_d + \mu_a$.
4. Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles de \mathcal{A} de μ -mesure finie et d'union Ω . Pour tous $n, k \geq 0$, on pose $D_{n,k} = \{\omega \in E_n; \mu(\{\omega\}) \geq 1/k\}$. Alors $\text{Card}(D_{n,k}) \leq k\mu(E_n)$. Comme D est l'union des ensemble $D_{n,k}$ pour $k, n \geq 0$, il en résulte que D est dénombrable.

□

6 – Compléments (hors TD)

Exercice 9. (“Cardinal” d’une tribu) Le but de l’exercice est de montrer qu’il n’existe pas de tribu \mathcal{A} infinie dénombrable. Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l’atome de la tribu \mathcal{A} engendré par x par,

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A}: x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de \mathcal{A} forment une partition de E .
2. Montrer que si \mathcal{A} est au plus dénombrable alors \mathcal{A} contient ses atomes et que chaque élément de \mathcal{A} s’écrit comme une réunion au plus dénombrable d’atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de question 3 de l’exercice 3.

Corrigé :

1. On remarque que $x \in \dot{x}$ pour tout $x \in E$, donc

$$\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E.$$

Montrons maintenant que

$$\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset \Rightarrow \dot{x} = \dot{y}.$$

Soient $x, y, z \in E$ tels que $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$. Alors chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$ contenant x contient z . Supposons qu’il existe $B \in \mathcal{A}$ contenant z mais ne contenant pas x . Alors $B^c \in \mathcal{A}$ et contient x . Ainsi B^c contient z ce qui est contradictoire. Donc $\dot{x} = \dot{z}$ et de même $\dot{y} = \dot{z}$. Donc $\dot{x} = \dot{y}$.

2. Supposons que \mathcal{A} soit finie ou dénombrable. Alors chaque atome \dot{x} s’écrit comme une réunion au plus dénombrable d’éléments de \mathcal{A} et donc appartient à \mathcal{A} . De plus, si $A \in \mathcal{A}$, alors

$$A = \bigcup_{x: x \in A} \dot{x}$$

et cette réunion est au plus dénombrable car les atomes appartiennent à \mathcal{A} . De plus, les atomes formant une partition de E , cette écriture est unique.

3. Soit \mathcal{B} l’ensemble des atomes de \mathcal{A} supposée finie ou dénombrable. D’après la question 2., on définit une bijection φ de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ dans \mathcal{A} par,

$$\varphi : B \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) \mapsto \bigcup_{\dot{x} \in B} \dot{x}.$$

Si \mathcal{B} est fini, alors \mathcal{A} est finie. Sinon, \mathcal{A} ne peut pas être dénombrable.

4. Les tribus \mathcal{F}_n sont toutes finies donc $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ est infinie dénombrable. D'après la question précédente, il n'existe pas de tribu infinie dénombrable, donc $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu. □



Exercice 10. (Support) Soit μ une mesure borélienne sur \mathbb{R}^n (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \mu(B(x, r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus S) = 0$, et que $\mu(S \setminus F) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S . (On appelle S le support de la mesure μ .)

Corrigé :

Soit $x \notin S$, alors par définition il existe un $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$, *a fortiori* pour tout z contenu dans la boule ouverte de centre x et de rayon r_x

$$B(z, r_x - |z - x|) \subset B(x, r_x) \text{ et donc } \mu(B(z, r_x - |z - x|)) = 0,$$

ce qui démontre que $B(x, r_x)$ est incluse dans S^c . L'ensemble F est donc fermé.

On sait que pour tout $x \notin S$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$. Si K est un compact inclu dans S^c il existe un recouvrement ouvert

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x),$$

duquel on peut extraire un recouvrement fini (Borel-Lebesgue). De plus S^c peut être vu comme une réunion dénombrable de compacts, par exemple

$$S^c = \bigcup_{n,k} \left\{ x : d(x, F) \geq \frac{1}{k}, |x| \leq n \right\},$$

ainsi S^c est une union dénombrable de boules ouvertes $S^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ et

$$\mu(S^c) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = \sum 0 = 0.$$

Si F est un fermé contenu dans S alors

$$\mathbb{R}^n \setminus F = \mathbb{R}^n \setminus S \sqcup S \setminus F,$$

et chacun de ces ensembles est mesurable, le résultat s'obtient en prenant la mesure de l'égalité. □



Exercice 11. (★ – Mesure atomique) Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = t$).

Corrigé :

Il s'agit d'un très bel exercice à zornette, voir

[http://en.wikipedia.org/wiki/Atom_\(measure_theory\)#Non-atomic_measures](http://en.wikipedia.org/wiki/Atom_(measure_theory)#Non-atomic_measures) □



Exercice 12. (Un problème d'additivité)

On note $l^\infty = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

On admet (théorème de Hahn-Banach) qu'il existe une forme linéaire $F : l^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ continue qui satisfait les deux propriétés suivantes : Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$

— $F(\mathbf{a}) \leq \|\mathbf{a}\|_\infty$,

— Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ existe alors $F(\mathbf{a}) = \alpha$.

2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $\mathbf{1}_A \in l^\infty$ définie par $\begin{cases} \mathbf{1}_A(n) = 1, & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Si $P(A) = F(\mathbf{1}_A)$, montrer que

— $P(\emptyset) = 0, P(\mathbb{N}) = 1$,

— $P(A^c) = 1 - P(A)$,

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

3. Montrer que P n'est pas une mesure.

Corrigé :

Pour la première question, voir le cours de topologie. Pour la deuxième question, exo :-). Pour la troisième question, il suffit de voir que :

$$1 = P(\mathbb{N}) = P\left(\bigcup_{i \geq 0} \{i\}\right) \neq \sum_{i \geq 0} P(\{i\}) = \sum_{i \geq 0} 0 = 0.$$

□

Exercice 13. (★) Est-ce que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ pour tous espaces métriques X, Y ?

Corrigé :

La réponse est non. Prenons $X = Y = (l^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire l'espace métrique des suites bornées indexées par \mathbb{R} muni de la norme infinie.

Lemme. Soit U un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Alors il existe des ensembles mesurables $(A_i, B_i)_{i \in \mathbb{R}}$ tels que

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Démonstration. D'après la question 4 de l'exercice 3, il existe une suite $(A_m)_{m \geq 0}$ d'ensembles mesurables tels que $U \in \sigma((A_m \times A_n)_{m, n \geq 0})$. En effet, on se rappelle qu'on a $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X) = \sigma(A \times A'; A, A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Maintenant, pour une suite $\underline{x} = (x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, posons

$$B_{\underline{x}} = \bigcap_{n \geq 0} C_n,$$

où $C_n = A_n$ si $x_n = 1$ et $C_n = A_n^c$ si $x_n = 0$. Mais l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme union des ensembles de la forme $B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x}'}$ est une tribu (le vérifier !!) contenant U (car il contient les $A_i \times A_j$). On en tire :

$$U = \bigcup \{B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x}'}; B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x}'} \subset U\}.$$

Ceci achève la preuve du lemme, car $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et \mathbb{R} sont en bijection. □

Revenons à la preuve de l'exercice. Il est clair que la diagonale $\Delta = \{(x, x); x \in l^\infty(\mathbb{R})\} \in \mathcal{B}(X \times X)$. Supposons par l'absurde que $\Delta \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. D'après le lemme, il existe une suite $(A_i, B_i)_{i \in \mathbb{R}}$ telle que

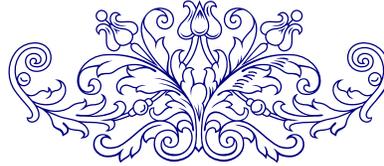
$$\Delta = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ s'injecte dans l^∞ , il existe $i \in \mathbb{R}$ et deux éléments distincts $(u, u), (v, v) \in \Delta$ tels que $(u, u), (v, v) \in A_i \times B_i$ (sinon, il existerait une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}).

Mais alors $(u, v) \in A_i \times B_i$, ce qui implique $(u, v) \in \Delta$. Absurde car $u \neq v$.

Remarque. Cette preuve montre que si X, Y sont deux espaces métriques dont le cardinal est strictement plus grand que celui de \mathbb{R} , alors $\mathcal{B}(X \times Y) \neq \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

□



Fin