TD 14 — Convergence de variables aléatoires

0 – Petites questions

Exercice 1. Vrai ou faux ?

1. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en loi. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en loi pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité et μ une mesure positive. Alors il y a convergence étroite des μ_n vers μ si et seulement si, pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence
$$\int f\, d\mu_n \longrightarrow \int f\, d\mu.$$
3. Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X]$.

Exercice 2. Quels sont les liens entre ces différentes convergences : en loi, presque sûre, en probabilité, $\mathbb{L}^1$, $\mathbb{L}^p$ pour $p > 1$?

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que presque sûrement la variable aléatoire aléatoire $\limsup_{n\to\infty} X_n$ est constante.

1 – Convergences en loi

Exercice 4. (**Lemme de Slutsky**) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. **Lemme de Slutsky** On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Exercice 5. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi μ. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

1. On suppose que μ est la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n\to\infty$ et expliciter la loi limite.
2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard c'est-à-dire que $\mu(dx) = (\pi(1+x^2))^{-1}\,dx$. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite. Rappel : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x\to+\infty$.

2 – Convergences en probabilité

Exercice 6.

1. Montrer qu'une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si de toute sous-suite de cette suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge ps vers X.
2. Montrer que si une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X et si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, alors $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers X. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive Y telle que $\mathbb{E}[Y]<\infty$ et $|X_n|\leq Y$ pour tout $n\geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}[X_n]\to\mathbb{E}[Y]$ lorsque $n\to\infty$.

Exercice 7. (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k, k\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1,2,\ldots,n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m\geq 1 : \{X_1,\ldots,X_m\} = \{1,2,\ldots,n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n = \inf\{m\geq 1 : |\{X_1,\ldots,X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. En déduire que $T_n/(n\log n)\to 1$ en probabilité.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a. réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On suppose que $X_n\to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n\to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

3 – Convergences $\mathbb{L}^p$

Exercice 9. (**Uniforme intégrabilité**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) est uniformément intégrable (ou equiintégraable ou u.i.) si

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}] = 0.$$

1. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est dominée par une v.a. Y intégrable, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. alors
$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[|X_n|]<\infty,$$
mais que la réciproque est fausse.

3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$

   Montrer que la réciproque est vraie à condition de supposer $\sup \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.
4. Soit $p > 1$, montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$ (*ie* $\sup \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$), alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
5. On suppose que $X_n \to X$ p.s.
   (a) On suppose que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
   (b) Réciproquement, on suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i.
      i. Montrer que X est intégrable.
      ii. Montrer que la suite $(X_n - X)_{n\geq 1}$ est u.i.
      iii. En déduire que $X_n \to X$ dans $\mathbb{L}^1$.

4 – Pour préparer l'examen

Réviser le cours et ce qui a été fait en TD. Chercher des exercices examens des années précédents (les énoncés sont disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 10.

1. Soit m une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité m_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$m_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m([k/n, (k+1)/n[)\delta_{k/n}.$$

   Montrer que $(m_n, n \geq 1)$ converge étroitement vers m.
2. En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires, chaque X_n étant de loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Exercice 11. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace (pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E, d)).

Exercice 13. (✯) Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $N(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ convergent vers respectivement m et σ, et identifier la loi limite.

Exercice 14. (✯) Soit $\lambda > 1$ fixé et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une famille de variables aléatoires telle que, pour tout $t \geq 0$, X_t suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-t}$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}[X_t = k] = e^{-t}(1 - e^{-t})^{k-1}, \qquad k \geq 1.$$

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\lambda U_n - \ln(n)$ converge en probabilité vers $-\ln(\mathcal{E})$ lorsque $n \to \infty$, où $\mathcal{E}$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que les deux familles $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $X_{U_n}/n^{1/\lambda}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle, dont le paramètre est aléatoire et vaut $\mathcal{E}^{1/\lambda}$.

Fin