TD 12 — Indépendance

0 – Petite question

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Montrer que $\mathbb{E}[F(X,Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(y) = \mathbb{E}[F(X,y)]$ pour $y \in \mathbb{R}$.

1 – Variables aléatoires indépendantes

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes (centrées réduites) indépendantes. Montrer que les variables aléatoires $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ soient indépendantes.

Exercice 3. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n = \max_{1 \le k \le n} U_k$.
2. Montrer que
$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 4. **(Formule de compensation.)** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

1. On suppose que μ est la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ c'est-à-dire que
$$\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0,$$
et que N suit la loi de Poisson de paramètre λ c'est-à-dire que
$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$
On pose
$$P = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F = N - P = \sum_{i=1}^{N}(1 - X_i),$$
avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

(a) Déterminer la loi du couple (P,N).

(b) En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

2. On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right) = \mathbb{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx),$$

avec $\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = 0$ sur $\{N = 0\}$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Si deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont indépendantes et ont un élément commun A, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que si $C \in \mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C) = 0$ ou $\mathbb{P}(C) = 1$. Montrer que si X est $\mathcal{C}$ mesurable, alors X est constante presque sûrement.

   Indication : on pourra introduire la fonction de répartition F de X et considérer $x_0 = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On suppose que $f(X)$ et X sont indépendantes. Montrer que $f(X)$ est constante presque sûrement.

2 – Indépendance et fonctions caractéristiques

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées. Démontrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right]. \tag{1}$$

Indication. Lire le titre de cette partie.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 7. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1, notées $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

1. Que vaut $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2)$?
2. Quelle est la loi de $\ln(1 + \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2)$?
3. On considère également une famille $(P_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires réelles (définies aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) telle que P_t suit la loi de Poisson de paramètre t pour tout $t > 0$ et on suppose que $(P_t)_{t\geq 0}$ est indépendante du couple $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Soit finalement une variable aléatoire réelle X (définie aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), caractérisée par le fait que

$$\mathbb{E}[F(X)] = \frac{\mathbb{E}\left[F(P_{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2})\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2\}}\right]}{\mathbb{P}[\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2]} \qquad \text{pour toute fonction } F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable.}$$

   Trouver la loi de X.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8.

1. Mathias a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Mathilde a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Exercice 9. (**Processus de Poisson**) Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

1. Soit $n \geq 1$. Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$.
2. En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.
3. Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)}, \ A \in \mathcal{A}.$$

   Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.

Exercice 10. (✯✯) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Montrer que les deux variables X et Y sont deux variables aléatoires gaussiennes.

Fin