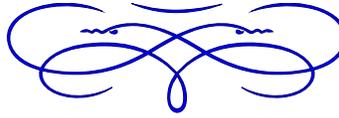


## TD 11 — Fonctions caractéristiques



## 0 – Petites questions

*Exercice 1.*

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité  $(1 - |x|)\mathbb{1}_{|x| < 1}$  ?
2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité  $(1 - \cos(x))/(\pi x^2)$  ?

*Exercice 2.* (Queues de variables aléatoires) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de  $X$  par

$$\psi(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si  $X$  est intégrable, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\psi(x) = 0.$$

2. Si  $X$  est dans  $\mathbb{L}^p$  avec  $p \geq 1$ , montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \psi(x) = 0.$$

3. Donner un équivalent de la queue de la loi d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

## 1 – Fonctions caractéristiques

**Notation.** Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, on notera  $\phi_X$  sa fonction caractéristique, définie par  $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Lorsque  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , sa fonction génératrice est par définition  $z \mapsto \mathbb{E}[z^X]$ .

*Exercice 3.*

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
  - (a) Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .
  - (b) Binomiale de paramètres  $(n, p)$ , avec  $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ .
  - (c) Géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .
  - (d) Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes :
  - (a) Exponentielle de paramètre  $\theta > 0$ .

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à [igor.kortchemski@ens.fr](mailto:igor.kortchemski@ens.fr), ou bien à venir me voir au bureau V4.

(b) Uniforme sur  $[0, 1]$ .

---

**Exercice 4.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que  $X$  admet un moment d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\phi_X$  est de classe  $C^k$  et que pour tout entier  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k \exp(itX)].$$

En particulier :

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k] \tag{1}$$

2. On suppose que  $\phi_X$  est 2 fois dérivable en 0. Montrer que  $X$  admet un moment d'ordre 2 et que  $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$ .

**Indication.** On pourra considérer  $\frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2}$ .

3. Soit  $k \geq 2$  entier. On suppose que  $\phi_X$  est  $k$  fois dérivable en 0. Montrer que  $X$  admet des moments jusqu'à l'ordre  $2\lfloor k/2 \rfloor$  (ici  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière de  $x$ ) donnés par (1).
4. Faire l'exercice 7.

---

**Exercice 5.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles. On note  $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$  pour simplifier, et on suppose qu'il existe une fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , continue en 0, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi(t).$$

1. Prouver que pour tout  $a > 0$  on a

$$\mathbb{P}\left[|X_n| > \frac{2}{a}\right] \leq \frac{1}{a} \int_{-a}^a (1 - \operatorname{Re}(\phi_n(u))) du = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (1 - \phi_n(u)) du.$$

2. Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $u > 0$  et  $n_0$  tels que pour  $n > n_0$  on ait

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^u |1 - \phi_n(t)| dt < \epsilon.$$

3. En déduire que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est tendue, c'est-à-dire que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $a > 0$  tel que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}[|X_n| > a] < 2\epsilon.$$

## 2 – À chercher pour la prochaine fois

---

**Exercice 6.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que  $X$  admet un moment d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(ituX) du\right].$$

(b) Montrer que

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{n!} \epsilon_n(t),$$

où  $|\epsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon_n(t) = 0$ .

2. On suppose que  $X$  admet des moments de tous ordres et que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty.$$

Ici,  $\|X\|_n = \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$ . Montrer qu'alors  $\phi_X$  est développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant  $\geq R/e$ . En déduire que :

$$\forall t \in \left] -\frac{R}{e}, \frac{R}{e} \right[, \quad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k].$$

### 3 – Compléments (hors TD)

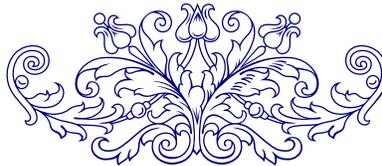
*Exercice 7.* Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de loi  $P_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$  symétrique (càd  $a_k = a_{-k}$ ) et telle que  $\sum_{k \geq 0} k a_k = \infty$ . Le moment d'ordre 1 de  $X$  est-il fini? Trouver une suite  $(a_k)_{k \geq 1}$  telle que  $\phi_X$  soit dérivable en 0. Comparer avec l'exercice 4.

*Exercice 8. (Problème des moments)* On considère la fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right).$$

Calculer  $\int_{\mathbb{R}_+^*} x^k f(x) dx$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Que peut-on dire des v.a.  $X$  et  $Y$  de densité respectives

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \text{ et } (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right)?$$



*Fin*