TD 11 — Fonctions caractéristiques

0 – Petites questions

Exercice 1.

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}$?
2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$?

Exercice 2. (Queues de variables aléatoires) Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de X par

$$\psi(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si X est intégrable, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x\psi(x) = 0.$$
2. Si X est dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x^p\psi(x) = 0.$$
3. Donner un équivalent de la queue de la loi d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

1 – Fonctions caractéristiques

Notation. Si X est une variable aléatoire réelle, on notera ϕ_X sa fonction caractéristique, définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$. Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice est par définition $z \mapsto \mathbb{E}\left[z^X\right]$.

Exercice 3.

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
   (a) Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
   (b) Binomiale de paramètres (n,p), avec $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$.
   (c) Géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   (d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes :
   (a) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

(b) Uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe C^k et que pour tout entier $1 \le k \le n$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k \exp(itX)\right].$$
En particulier :
$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right] \tag{1}$$
2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$.
Indication. On pourra considérer $\frac{\phi_X(t)+\phi_X(-t)-2}{t^2}$.
3. Soit $k \ge 2$ entier. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$ (ici $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x) donnés par (1).
4. Faire l'exercice 7.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On note $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$ pour simplifier, et on suppose qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en 0, telle que
$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t).$$

1. Prouver que pour tout $a > 0$ on a
$$\mathbb{P}\left[|X_n| > \frac{2}{a}\right] \le \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - \mathrm{Re}(\phi_n(u)))\,du = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\phi_n(u))\,du.$$
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u > 0$ et n_0 tels que pour $n > n_0$ on ait
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} |1-\phi_n(t)|dt < \epsilon.$$
3. En déduire que la suite $(X_n)_{n\ge1}$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que
$$\forall n \ge 1, \qquad \mathbb{P}[|X_n| > a] < 2\epsilon.$$

2 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{(n-1)!}\mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1}\exp(ituX)du\right].$$

(b) Montrer que

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{n!}\epsilon_n(t),$$

où $|\epsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t\to 0} \epsilon_n(t) = 0$.

2. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty.$$

Ici, $\|X\|_n = \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer qu'alors ϕ_X est développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant $\geq R/e$. En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right[, \qquad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right].$$

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $P_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ symétrique (càd $a_k = a_{-k}$) et telle que $\sum_{k\geq 0} ka_k = \infty$. Le moment d'ordre 1 de X est-il fini ? Trouver une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que ϕ_X soit dérivable en 0. Comparer avec l'exercice 4.

Exercice 8. **(Problème des moments)** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x)\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right).$$

Calculer $\int_{\mathbb{R}+} x^k f(x)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des v.a. X et Y de densité respectives

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \text{ et } (1+\sin(2\pi\ln x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right)?$$

Fin