TD 10 — Lois de variables aléatoires

Notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une fonction $X : \Omega \to E$ qui est $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurable est appelée **variable aléatoire**, (sous entendu $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ mesurable), abrégé en v. a. On parle de variable aléatoire réelle lorsque $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'**espérance** de X est par définition son intégrale par rapport à $\mathbb{P}$, et on la note $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Par définition, la **loi** de X, notée $\mathbb{P}_X$, est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, autrement dit

$$\forall C \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_X(C) = \mathbb{P}(X \in C).$$

En particulier, d'après le théorème de transfert, pour toute fonction $f : E \to [0, \infty]$ qui est $\mathcal{E}$-mesurable,

$$\int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[f(X)] = \int_E f(u)\, d\mathbb{P}_X(u)\,.$$

Une variable aléatoire réelle est dite gaussienne centrée réduite si sa densité est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, et une variable aléatoire réelle est dite exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1 – Calculs de lois

Exercice 1. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\, dx\, dy.$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{4\pi} e^{-x/2}\, \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(y)\, dx\, dy.$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. On suppose que la loi de (X,Y) est
$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$
Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

3 – Lois de variables aléatoires

Exercice 2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. On suppose que $X=Y$ p.s (c'est-à-dire $\mathbb{P}$ presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 3. **(Simulation de variables aléatoires.)** Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t)=\mathbb{P}(X\le t)$ pour $t\in\mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,
$$F^{-1}(u)=\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)>u\}.$$
Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
Indication. On pourra vérifier que $\{F^{-1}(U)\le t\}=\bigcap_{n\ge1}\{U<F(t+1/n)\}$.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, et X la variable aléatoire définie par $X=-\frac{1}{p}\ln(U)$. Déterminer la loi de X.

Exercice 4. **(Variables exponentielles)**

1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s,t>0$,
$$\mathbb{P}(X>t+s)=\mathbb{P}(X>t)\mathbb{P}(X>s).$$
Trouver toutes les variables aléatoires réelle positives X qui vérifient la propriété d'absence de mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Calculer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X\rfloor$, où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.

4 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 5. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1,0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2,\pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}\, dx$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Exercice 7. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0, 1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Exercice 8. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \dots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \ \text{ et } \ \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

   pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \dots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Exercice 9. **(Pouvoir paranormal moyen)** On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

Exercice 10. On considère un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table. On retourne une à une les cartes jusqu'à trouver une dame. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Fin