TD 1 – Prolégomènes

1 – Limites supérieure et inférieure d'une suite

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Vérifier les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \\ \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \\ \limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha \quad &\Rightarrow \quad \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \\ \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \quad &\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \alpha. \end{aligned}$$

   Écrire des assertions similaires faisant intervenir $\liminf_{n\to\infty} a_n$.
3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.
   (a) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Vérifier que a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$.

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \text{et} \qquad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Que dire si f est décroissante ?

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2 – Limites supérieure et inférieure d'ensembles

Exercice 3. (Fonctions indicatrices) Soit E un ensemble. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ l'application $E \to \{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon. La fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice de A (ou encore fonction caractéristique de A ou tout simplement l'indicatrice de A).

1. Si $A, B \subset E$, écrire $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 1} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.
3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,\infty[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[0,n]}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}.$$

Exercice 4. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k \ , \ \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \ ?$$

   Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions indicatrices

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}, \quad \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

   aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.
   (a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n)^c$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$
   (b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}, \qquad \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\}.$
   (c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n, \quad \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n.$
3. Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ dans les cas suivants
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés,
   (b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2p} = 1 + 1/(2p)$ et $a_{2p+1} = -1 - 1/(2p+1)$,
   (c) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2p)[$ et $A_{2n+1} =]-1 - 1/(3p), 2]$,
   (d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n,
   (e) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 5. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E; \quad f(x) \geq n\}, \qquad B_{n,i} = \{x \in E; \quad i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n})\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose $f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{B_{n,i}} + n\mathbb{1}_{A_n}$. Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$?

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Soient X un ensemble non vide et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ bornées, qui converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ bornée.

(i) Montrer que $\sup_{x\in X} f(x) \leq \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x))$. Établir une inégalité analogue pour l'inf.

(ii) Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer qu'il y a égalité si la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniforme.

Exercice 7. (D'après compétition Putnam 1954) Trouver la valeur de $\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{a+s}{n}\right)^n$, où $a > 0$.

Exercice 8.

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels vérifiant $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. Montrer que la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$.
2. (☀) Un chemin autoévitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite de points distincts $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à coordonnées entières où A_0 est l'origine et tels que la distance entre A_i et A_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Soit a_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $a_n^{1/n}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif noté c et que $2 < c < 3$.

Remarque. Le réel c est appelé *constante de connectivité du réseau* $\mathbb{Z}^2$. On ne connaît pas sa valeur exacte. La constante de connectivité du réseau hexagonal a été calculée par Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov en 2012 [1], résolvant ainsi une conjecture formulée en physique théorique il y a 30 ans par Nienhuis.

Références

[1] H. Duminil-Copin et S. Smirnov, The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, *Annals of Mathematics*, **175(3)**, 1653–1665 (2012).

Fin