TD 1 – Prolégomènes – Corrigé

1 – Limites supérieure et inférieure d'une suite

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \text{ et } \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Vérifier les assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha &\quad\Rightarrow\quad \exists n\geq 0, \forall k\geq n, a_k < \alpha\\
\exists n\geq 0, \forall k\geq n, a_k < \alpha &\quad\Rightarrow\quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha\\
\limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha &\quad\Rightarrow\quad \forall n\geq 0, \exists k\geq n, a_k > \alpha\\
\forall n\geq 0, \exists k\geq n, a_k > \alpha &\quad\Rightarrow\quad \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \alpha.
\end{aligned}$$

   Écrire des assertions similaires faisant intervenir $\liminf_{n\to\infty} a_n$.
3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.
   (a) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Vérifier que a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$.

Corrigé :

1. La suite de terme général $\sup_{k\geq n} a_k$ est décroissante, donc elle a bien une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. De même pour la lim inf et la limite croissante.
2. Vérifions la première assertion :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha &\quad\Rightarrow\quad \exists n\geq 0, \sup_{k\geq n} a_k < \alpha\\
&\quad\Rightarrow\quad \exists n\geq 0, \forall k\geq n, a_k < \alpha.
\end{aligned}$$

   Le reste des assertions se démontre de la même façon.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. (a) Soit L la plus grande valeur d'adhérence de la suite (a_n) et soit $L' = \limsup_{n\to\infty} a_n$ On suppose que $L, L' \neq \infty$ (les cas $L = \infty$ ou $L' = \infty$ se traitent similairement). Il existe alors une extraction ϕ (c'est-à-dire une fonction injective croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) telle que $a_{\phi(n)} \to L$. Comme $a_{\phi(n)} \leq \sup_{k\geq\phi(n)} a_k$, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$ on en déduit que $L \leq L'$.

   Une autre possibilité est de voir que d'après la première implication de question 2, si $L' < \alpha$ alors forcément $L \leq \alpha$, ce qui implique que $L \leq L'$.

   Notons $L' = \limsup_{n\to\infty} a_n$ et montrons maintenant l'autre inégalité en prouvant que L' est une valeur d'adhérence de la suite (a_n). On construit pour cela par récurrence une suite strictement croissante $\phi(0), \phi(1), \phi(2), \ldots$ telle que $L' + 1/n > a_{\phi(n)} > L' - 1/n$ pour tout entier $n \geq 1$. Posons $\phi(0) = 0$. Soit $n \geq 1$ un entier et supposons $\phi(0), \phi(1), \ldots, \phi(n-1)$ construits. Comme $L' > L' - 1/n$, il existe un entier $N > \phi(n-1)$ tel que $L' + 1/n > \sup_{k\geq N} a_k > L' - 1/n$. Il existe donc un entier entier noté $\phi(n)$ tel que $\phi(n) > \phi(n-1)$ et $L' + 1/n > a_{\phi(n)} > L' - 1/n$. Ainsi $a_{\phi(n)} \to L'$, qui est bien valeur d'adhérence.

   On raisonne similairement pour la lim inf (ou bien on remarque qu'on a l'égalité $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n)$).

   (b) C'est une conséquence quasi-immédiate de (a).

□

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\geq1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \text{et} \qquad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Que dire si f est décroissante ?

Corrigé :

Posons $y_n = \sup_{k\geq n} x_k$ pour $n \geq 1$. Montrons d'abord que $f(y_n) = \sup_{k\geq n} f(x_k)$. Par croissance de f, $f(y_n) \geq \sup_{k\geq n} f(x_k)$. Ensuite par définition de la borne supérieure, il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (qui n'est pas forcement strictement croissante) telle que $\phi(k) \geq n$ pour tout entier $k \geq 0$ et $x_{\phi(k)} \to y_n$ lorsque $k \to \infty$. Or, pour $k \geq n$, $f(x_{\phi(k)}) \leq \sup_{i\geq k} f(x_{\phi(i)}) \leq \sup_{i\geq n} f(x_i)$, en passant à la limite il vient $f(y_n) \leq \sup_{k\geq n} f(x_k)$, ce qui prouve le résultat annoncé. En passant à la limite, il vient alors immédiatement

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Le raisonnement est similaire pour la lim inf.

Lorsque f est décroissante, on a

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \text{et} \qquad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Le raisonnement est similaire, et est laissé au lecteur. On peut aussi remplacer f par $-f$ et utiliser ce qui précède. □

2 – Limites supérieure et inférieure d'ensembles

Exercice 3. (Fonctions indicatrices) Soit E un ensemble. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ l'application $E \to \{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon. La fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice de A (ou encore fonction caractéristique de A ou tout simplement l'indicatrice de A).

1. Si $A, B \subset E$, écrire $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 0} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.
3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,\infty[}, \qquad \sum_{n=0} \mathbb{1}_{[0,n]}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}.$$

Corrigé :

1. On voit que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ et $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.
2. On a $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 0} A_n} = \prod_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = \inf\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ et $\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n} = 1 - \prod_{n\geq 0}(1 - \mathbb{1}_{A_n}) = \sup\{\mathbb{1}_{A_n}\}$.
3. Pas de difficulté.

□

Exercice 4. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k\ , \quad \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\ ?$$

   Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions indicatrices

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}, \quad \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

   aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.
   (a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n)^c$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$
   (b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$, $\qquad \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\}$.
   (c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$, $\quad \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$.
3. Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ dans les cas suivants
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés,
   (b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_p = 1 + 1/(2p)$ et $a_{2p+1} = -1 - 1/(2p+1)$,
   (c) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2p)[$ et $A_{2n+1} =]-1 - 1/(3p), 2]$,
   (d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n,
   (e) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

Corrigé :

1. L'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang, ou, en d'autres mots, l'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

   L'ensemble $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de A_n.

   On a l'égalité
$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}. \tag{1}$$
   En effet,
$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0, \quad x \in A_n, \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \inf_{n \geq n_0} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1, \\ &\Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1. \end{aligned}$$
   L'égalité
$$\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$$
   se démontre de façon similaire à (1) ou en passant au complémentaire dans (1) en utilisant la question 2(a).

2. (a) Pour la première égalité, il suffit d'écrire
$$\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} (A_k)^c.$$
   Pour la deuxième, on peut dire que si un élément appartient à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux, alors il appartient à une infinité de A_n.

   (b) L'ensemble $\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$ est l'ensemble des éléments appartenant à une infinité de A_n et l'ensemble $\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\}$ est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à un nombre fini de A_n, d'où le résultat d'après la question 1.

   (c) La première égalité provient du fait qu'un élément appartienent à une infinité de $A_n \cup B_n$ si et seulement si il appartient à une infinité de A_n ou bien à une infinité de B_n, et la seconde du fait que si on appartient à une infinité de $A_n \cap B_n$ alors on appartient à une infinité de A_n et une infinité de B_n.

3. (a) On a $\limsup A_n = F \cup G$ et $\liminf A_n = F \cap G$.

   (b) On a $\limsup A_n =]-\infty, 1]$ et $\liminf A_n =]-\infty, 1[$.

   (c) On a $\limsup A_n = [-1, 3]$ et $\liminf A_n =]0, 2]$.

   (d) On a $\liminf A_n = \limsup A_n = \{0\}$.

   (e) On a $\limsup A_n =]-2, 2[$ et $\liminf A_n = \{0\}$. En effet, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $]-1, 1[$ (pour le voir, utiliser par exemple le fait que le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas monogène car π est irrationel, donc dense dans $\mathbb{R}$), donc pour tout $0 < x < 2$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sin(n) > x - 1$ et aussi une infinité de n tels que $\sin(n) < x - 1$. La première famille montre que $x \in \limsup A_n$ et la deuxième famille que $x \notin \liminf A_n$. Il est ensuite facile de vérifier que $\pm 2 \notin \limsup A_n$ (car π est irrationnel) et $0 \in \liminf A_n$.

$\square$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Soient X un ensemble non vide et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ bornées, qui converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ bornée.

(i) Montrer que $\sup_{x\in X} f(x) \leq \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x))$. Établir une inégalité analogue pour l'inf.

(ii) Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer qu'il y a égalité si la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniforme.

Corrigé :

1. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Soit $x \in X$ tel que $\sup_{x\in X} f(x) \leq f(x) + \epsilon$. Soit N un entier tel que $f(x) \leq f_n(x) + \epsilon$ pour tout entier $n \geq N$. Ainsi, pour $n \geq N$, $\sup_{x\in X} f(x) \leq f_n(x) + 2\epsilon$. On en déduit que $\sup_{x\in X} f(x) \leq \sup_{x\in X} f_n(x) + 2\epsilon$. D'où
$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x)) + 2\epsilon.$$
Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, le résultat désiré en découle.
En remplaçant f par $-f$, on obtient immédiatement que
$$\inf_{x\in X} f(x) \geq \limsup_{n\to\infty}(\inf_{x\in X} f_n(x)).$$

2. Il suffit de prendre $X = [0,1]$ et f_n la fonction telle que $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pour $x \in [1/n, n]$ et f affine sur $[0, 1/n]$. On a alors $f = 0$ et
$$\sup_{x\in X} f(x) = 0 \neq 1 = \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x)).$$
Si la convergence est uniforme, on voit aisément que $\sup_{x\in X} f_n(x) \to \sup_{x\in X} f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

$\square$

Exercice 7. (D'après compétition Putnam 1954) Trouver la valeur de $\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{a+s}{n}\right)^n$, où $a > 0$.

Corrigé :

On utilisera l'inégalite $(1 + x/n)^n \leq e^x$, valable si $n \geq 1$ et $1 + x/n > 0$. Posons $S_n = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{a+s}{n}\right)^n$. Alors
$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} \left(1 + \frac{a-r}{n}\right)^n \leq \sum_{r=0}^{n-1} e^{a-r} < \sum_{r=0}^{\infty} e^{a-r} = \frac{e^{a+1}}{e-1}.$$
Ainsi $\limsup_{n\to\infty} S_n \leq \frac{e^{a+1}}{e-1}$. Similairement, pour un entier k fixé et $n > k$: $S_n \geq \sum_{r=0}^{k} \left(1 + \frac{a-r}{n}\right)^n$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $\liminf_{n\to\infty} S_n \geq \sum_{r=0}^{k} e^{a-r}$. En faisant maintenant tendre k vers l'infini, on trouve $\liminf_{n\to\infty} S_n \geq \sum_{r=0}^{\infty} e^{a-r} = \frac{e^{a+1}}{e-1}$. On conclut que $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e^{a+1}}{e-1}$. $\square$

Exercice 8.

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels vérifiant $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. Montrer que la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{n}$.
2. (★) Un chemin autoévitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite de points distincts $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à coordonnées entières où A_0 est l'origine et tels que la distance entre A_i et A_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Soit a_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $a_n^{1/n}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif noté c et que $2 < c < 3$.

Remarque. Le réel c est appelé *constante de connectivité du réseau* $\mathbb{Z}^2$. On ne connaît pas sa valeur exacte. La constante de connectivité du réseau hexagonal a été calculée par Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov en 2012 [1], résolvant ainsi une conjecture formulée en physique théorique il y a 30 ans par Nienhuis.

Corrigé :

1. Soit $q > 0$ fixé et n un entier vérifiant $n \geq q$. Soit $n = k_n q + r_n$ ($k_n \geq 1$ et $0 \leq r_n \leq q-1$) la division euclidienne de n par q. En écrivant $a_n = a_{(k_n-1)q+q+r_n} \leq (k_n-1)a_q + a_{q+r_n}$, il vient
$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{k_n-1}{n}a_q + \frac{a_{q+r_n}}{n} = \frac{q(k_n-1)}{n}\cdot\frac{a_q}{q} + \frac{a_{q+r_n}}{n} \leq \frac{n-r_n-q}{n}\cdot\frac{a_q}{q} + \frac{1}{n}\max_{0\leq i\leq q-1}\frac{a_{q+i}}{n}.$$
Comme $0 \leq r_n \leq q-1$, $(n-r_n-q)/n \to 1$, et donc
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq \frac{q_q}{q}.$$
Ceci étant vrai pour tout entier $q \geq 1$, on en déduit que
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq \inf_{n\geq 1}\frac{a_n}{n}.$$
Comme on a clairement $\inf_{n\geq 1}\frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, on a bien égalité.
2. Un chemin auto-évitant de longueur $m+n$ est la concaténation de deux chemins auto-évitants de longueurs respectives m et n. Donc $a_{m+n} \leq a_m a_n$. On peut donc appliquer la première question à la suite $\ln(a_n)$, ce qui implique que $a_n^{1/n}$ converge vers un réel positif c.
En faisant des pas vers le haut ou la droite uniquement on voit que $2^n \leq a_n$ et comme on ne peut pas revenir en arrière on a $a_n \leq 4\cdot 3^{n-1}$, ce qui prouve que $2 \leq c \leq 3$. Pour obtenir les inégalités strictes, trouvez deux encadrements meilleurs !

□

Références

[1] H. Duminil-Copin et S. Smirnov, The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, *Annals of Mathematics*, **175(3)**, 1653–1665 (2012).

Fin