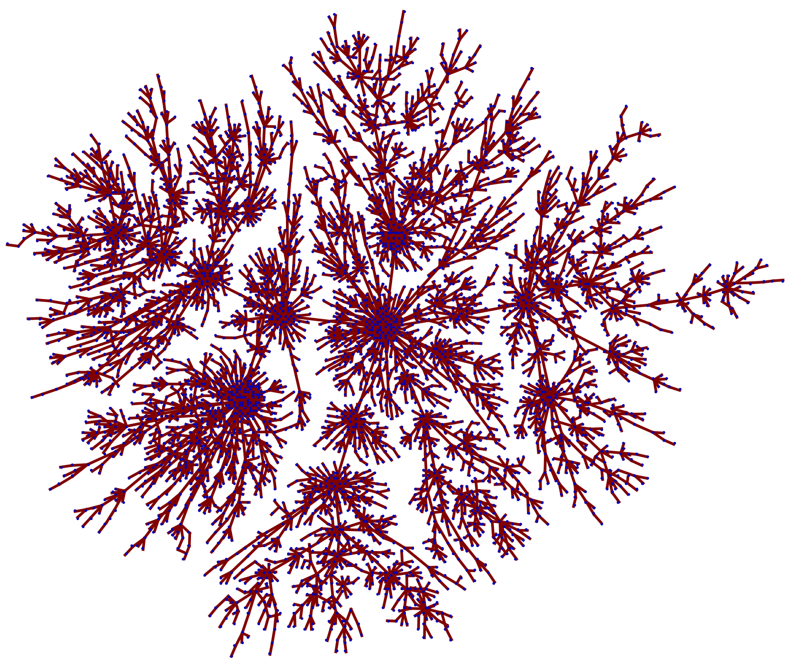
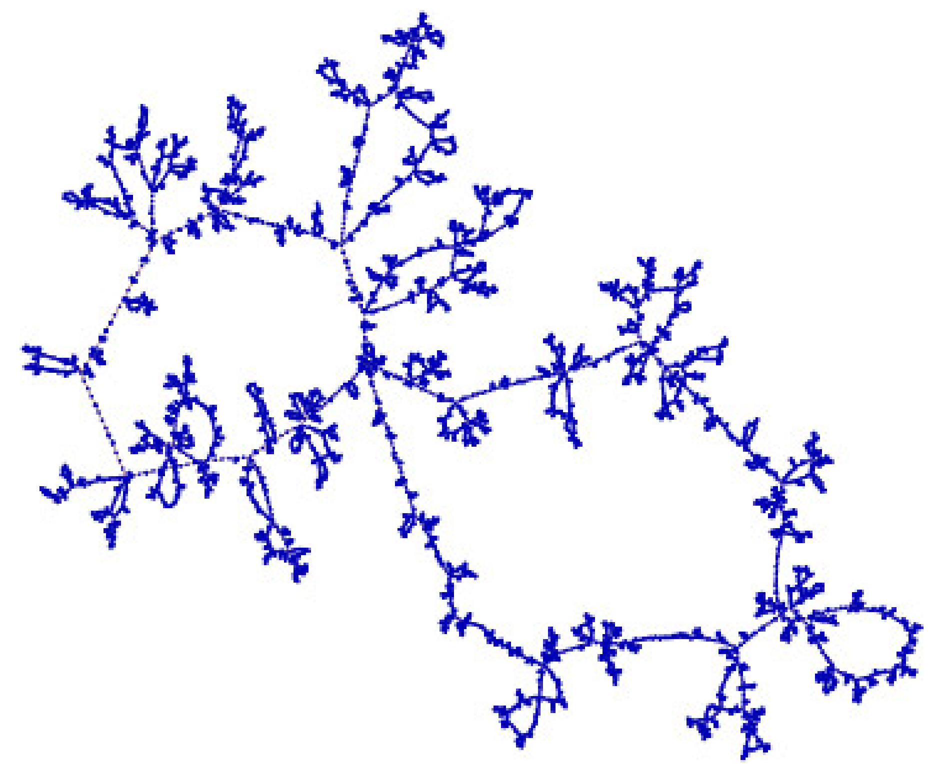
# Ontogénèse des arbres construits par attachement préférentiel





Igor Kortchemski (travail avec N. Curien, T. Duquesne & I. Manolescu)
CNRS & CMAP, École polytechnique

**Journée de lancement ANR GRAAL, Bordeaux, juin 2015**

# Plan

I. Influence de la condition initiale

II. Limites d'échelle *via* les « arbres à boucles »

III. = I. + II.

IV. Autres « arbres à boucles »

# Plan

**I. Influence de la condition initiale**

**II. Limites d'échelle *via* les « arbres à boucles »**

**III. = I. + II.**

**IV. Autres « arbres à boucles »**

# Arbres construits par attachement préférentiel

# *Arbres construits par attachement préférentiel*

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres aléatoires construits récursivement comme suit :

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres aléatoires construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre avec $k$ sommets (la condition initiale),

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres aléatoires construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre avec $k$ sommets (la condition initiale),
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en rajoutant une arête à un sommet de $T_n^{(S)}$

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres aléatoires construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre avec $k$ sommets (la condition initiale),
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en rajoutant une arête à un sommet de $T_n^{(S)}$ choisi au hasard

# *Arbres construits par attachement préférentiel*

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres aléatoires construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre avec $k$ sommets (la condition initiale),
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en rajoutant une arête à un sommet de $T_n^{(S)}$ choisi au hasard **proportionnellement à son degré.**

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres aléatoires construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre avec $k$ sommets (la condition initiale),
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en rajoutant une arête à un sommet de $T_n^{(S)}$ choisi au hasard **proportionnellement à son degré.**

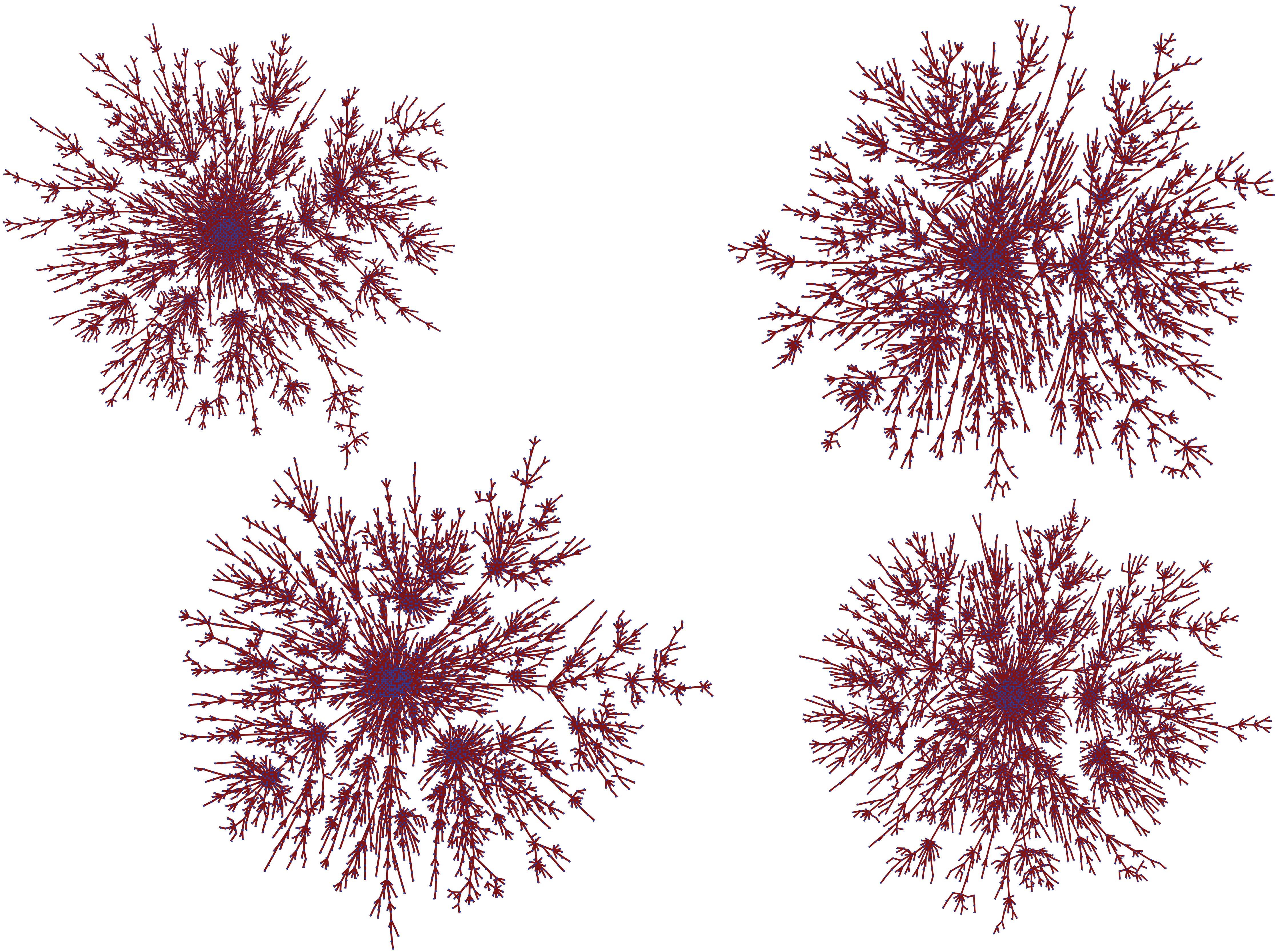
Il s'agit du modèle d'attachement préférentiel (Szymánski '87 ; Albert & Barabási '99 ; Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády '01).

# Influence de la condition initiale

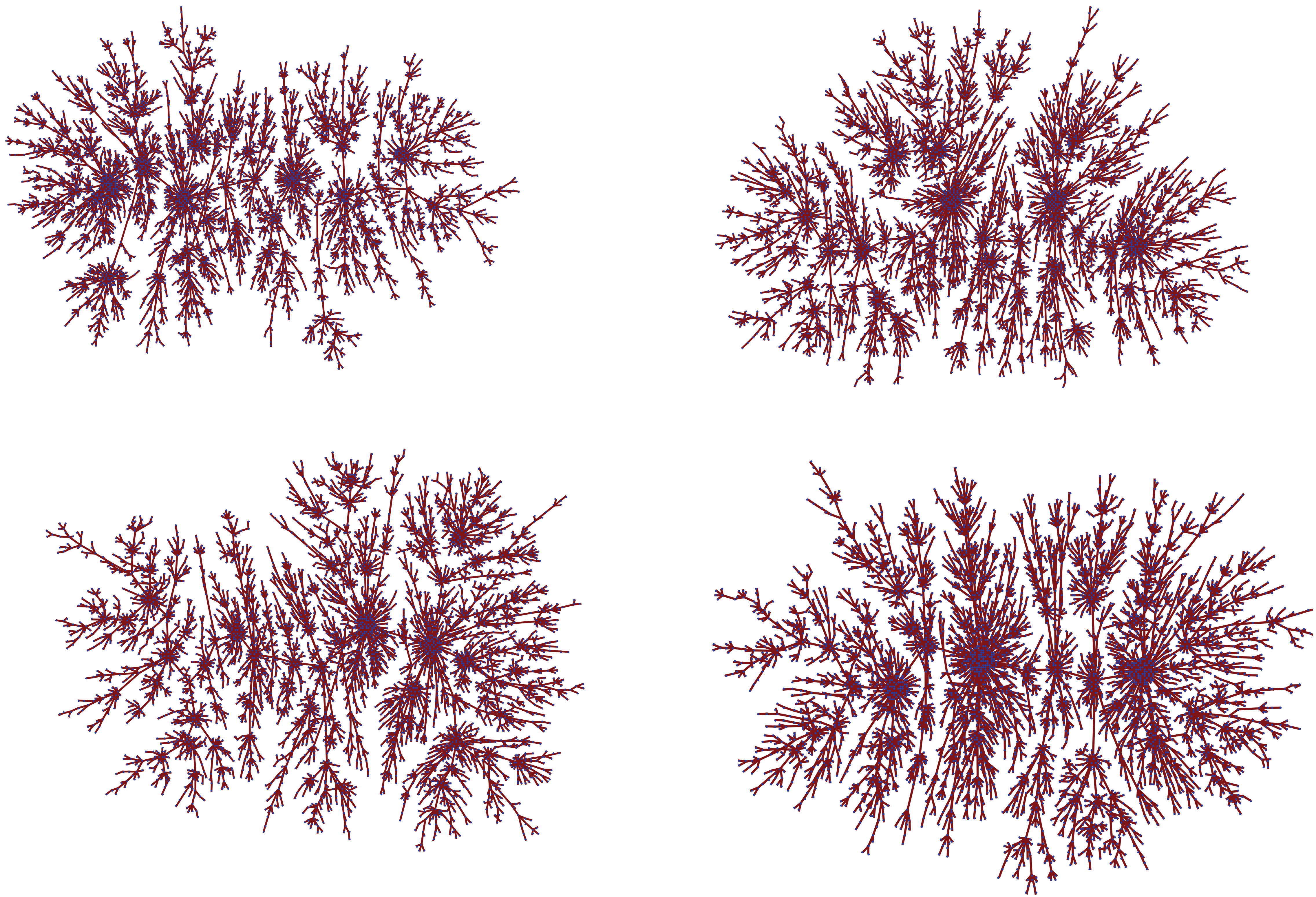
**Question** (Bubeck, Mossel & Rácz) : Quelle est l'influence de l'arbre initial ?

**Question** (Bubeck, Mossel & Rácz) : Quelle est l'influence de l'arbre initial ? Asymptotiquement, peut-on reconnaître différentes conditions initiales ?

Quatre simulations de $T_n^{(S_1)}$ for $n = 5000$ :

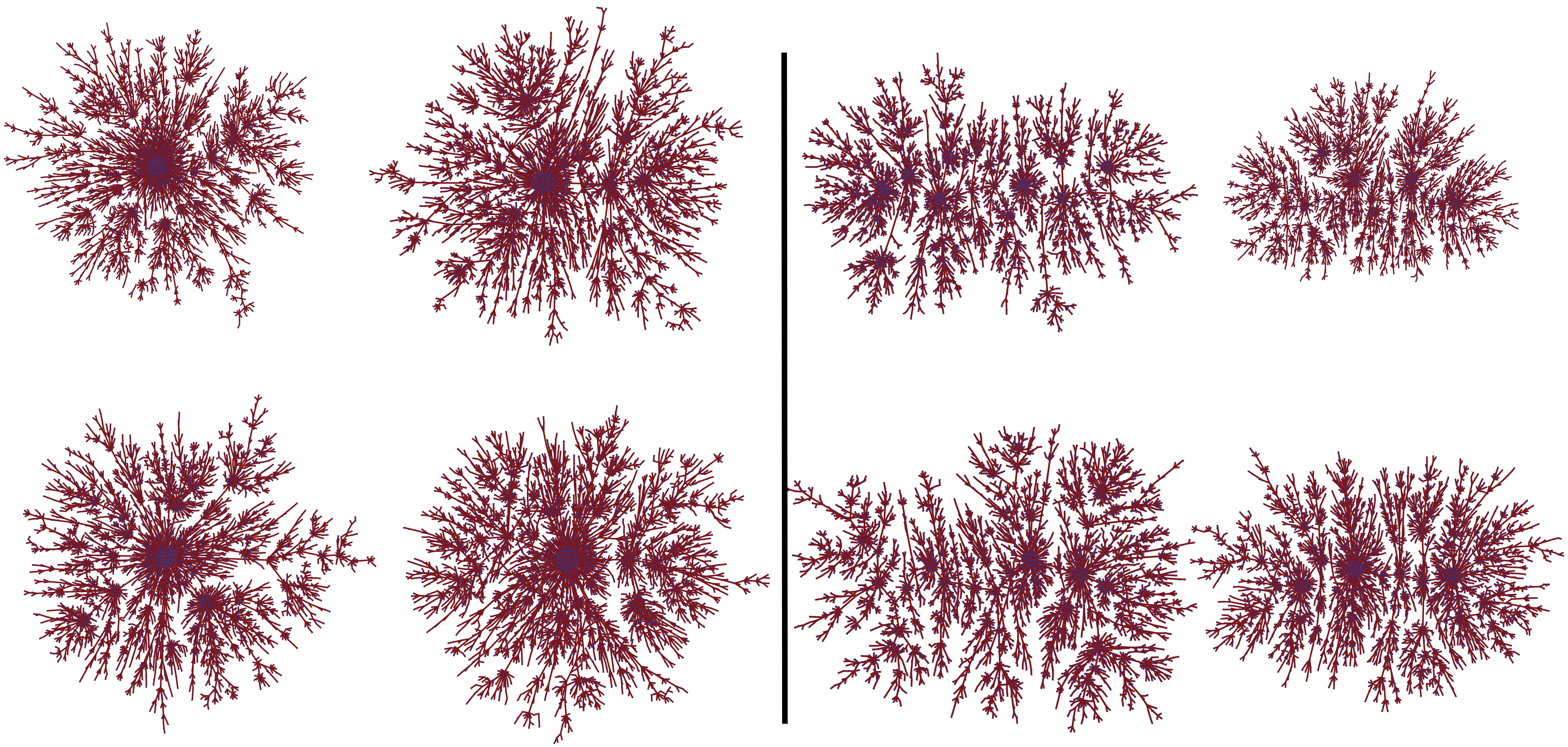


Quatre simulations de $T_n^{(S_2)}$ for $n = 5000$ :



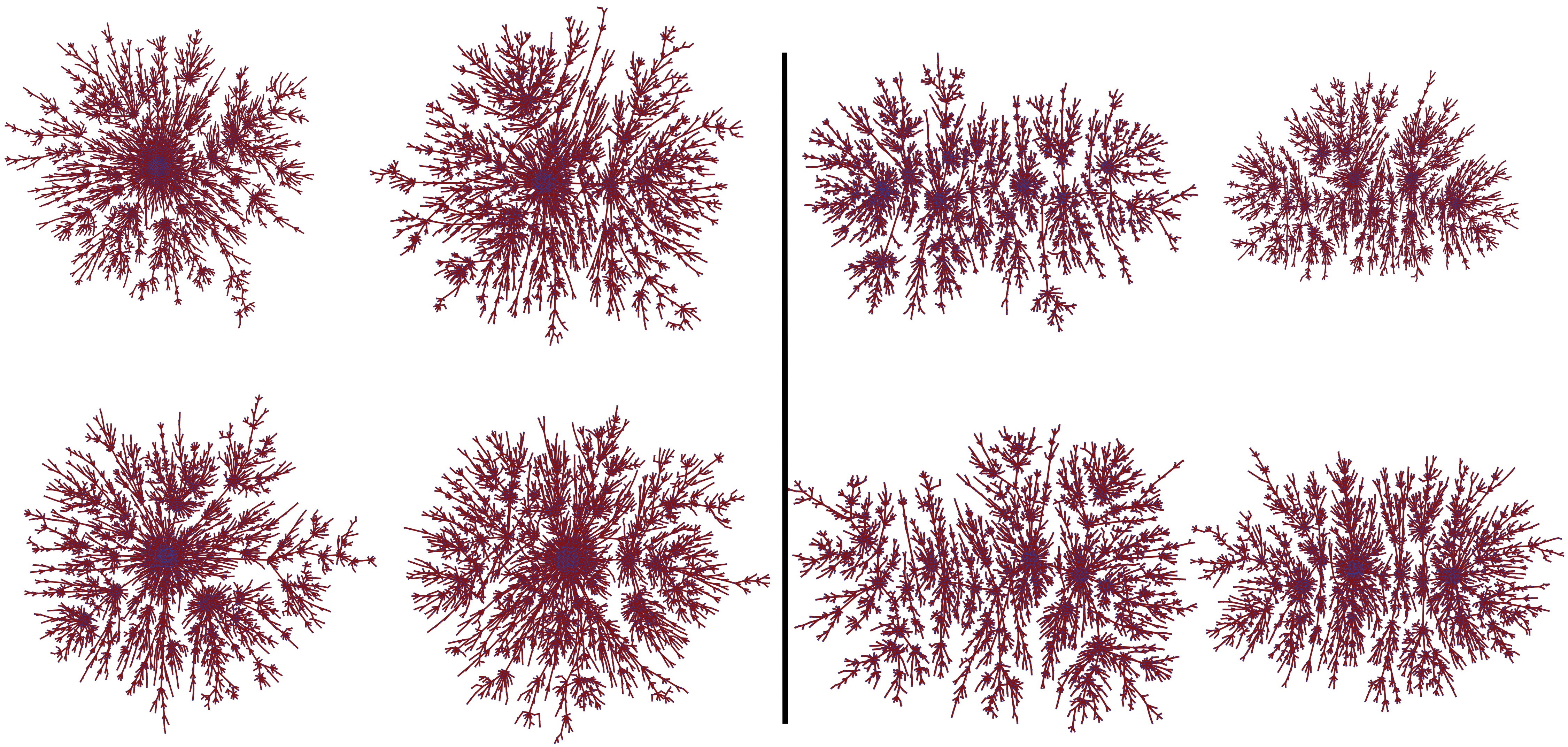
# *Referendum*

Quatre simulations de $T_n^{(S_1)}$, $T_n^{(S_2)}$ for $n = 5000$ :



# Referendum

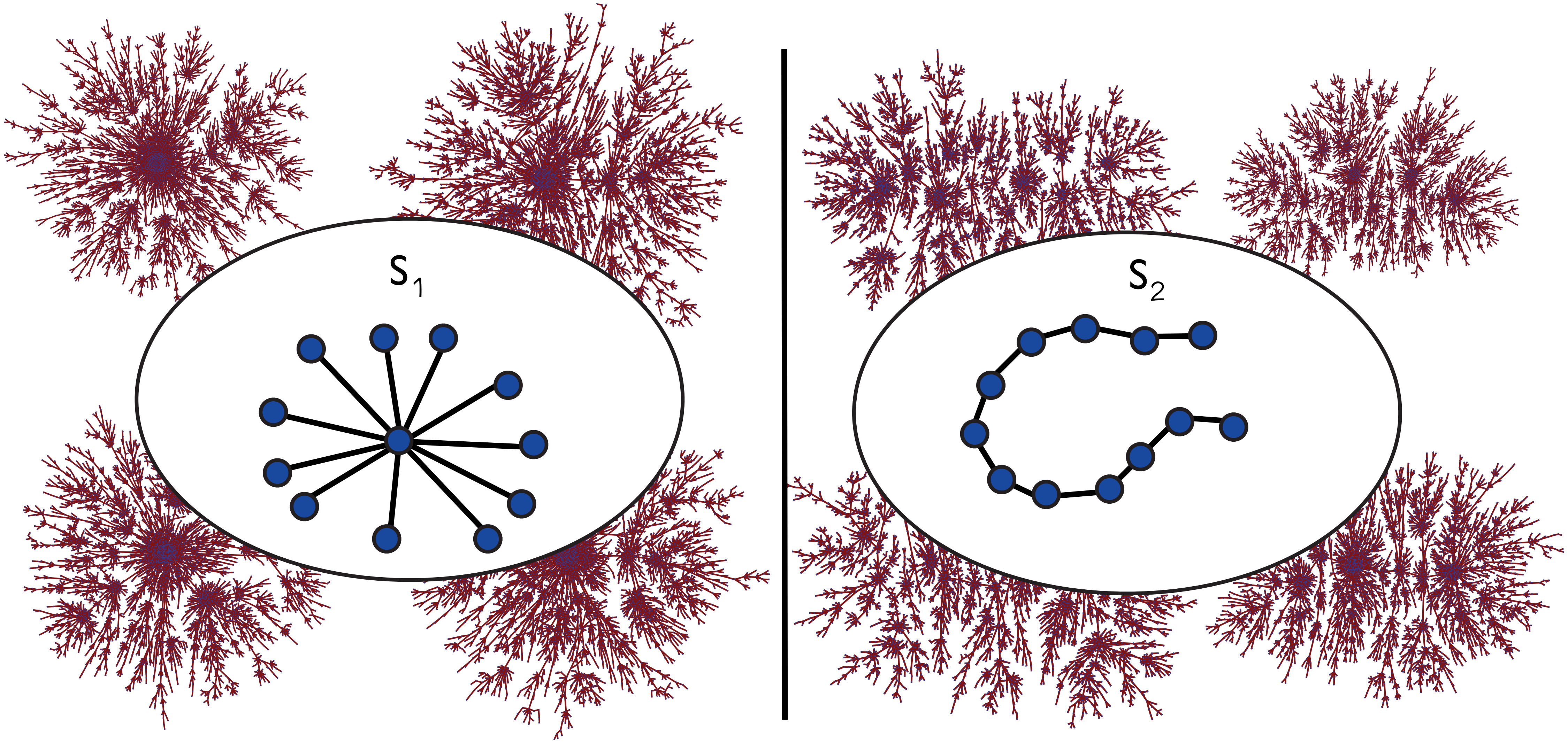
Quatre simulations de $T_n^{(S_1)}$, $T_n^{(S_2)}$ for $n = 5000$ :



A-t-on $S_1 = S_2$ ?

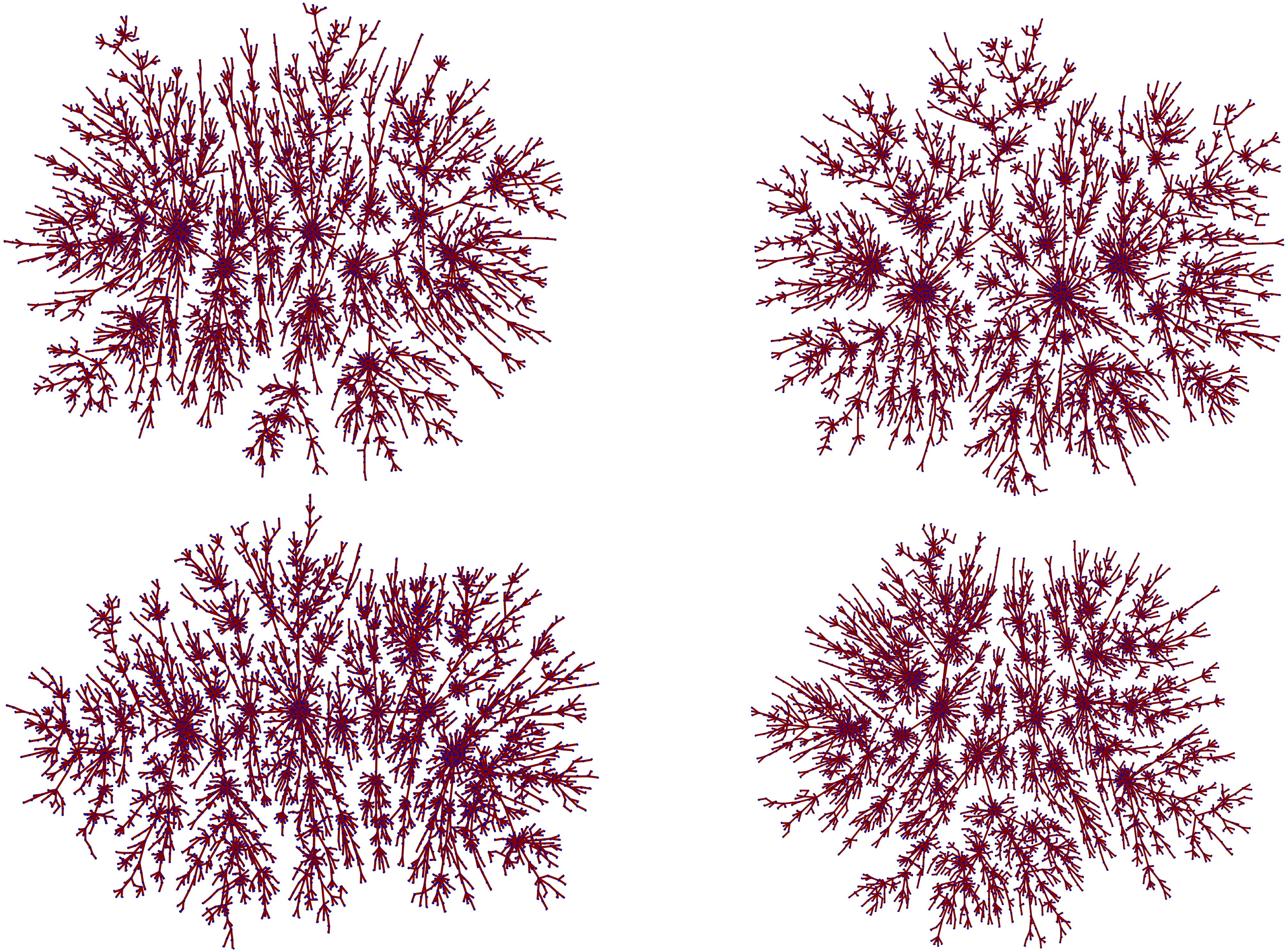
# Referendum

Quatre simulations de $T_n^{(S_1)}$, $T_n^{(S_2)}$ for $n = 5000$ :

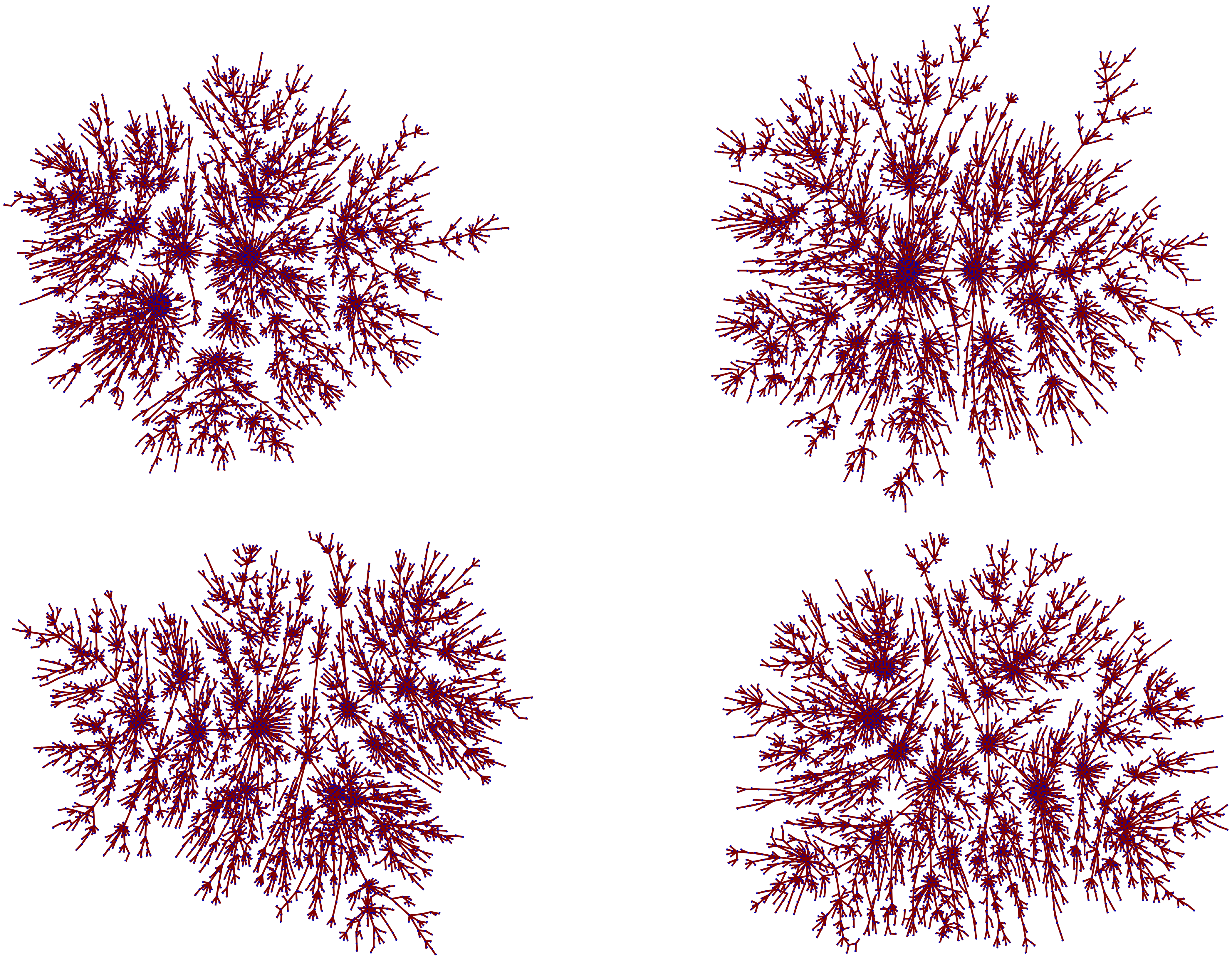



A-t-on $S_1 = S_2$ ?

Quatre simulations de $T_n^{(S_1')}$ for $n = 5000$ :

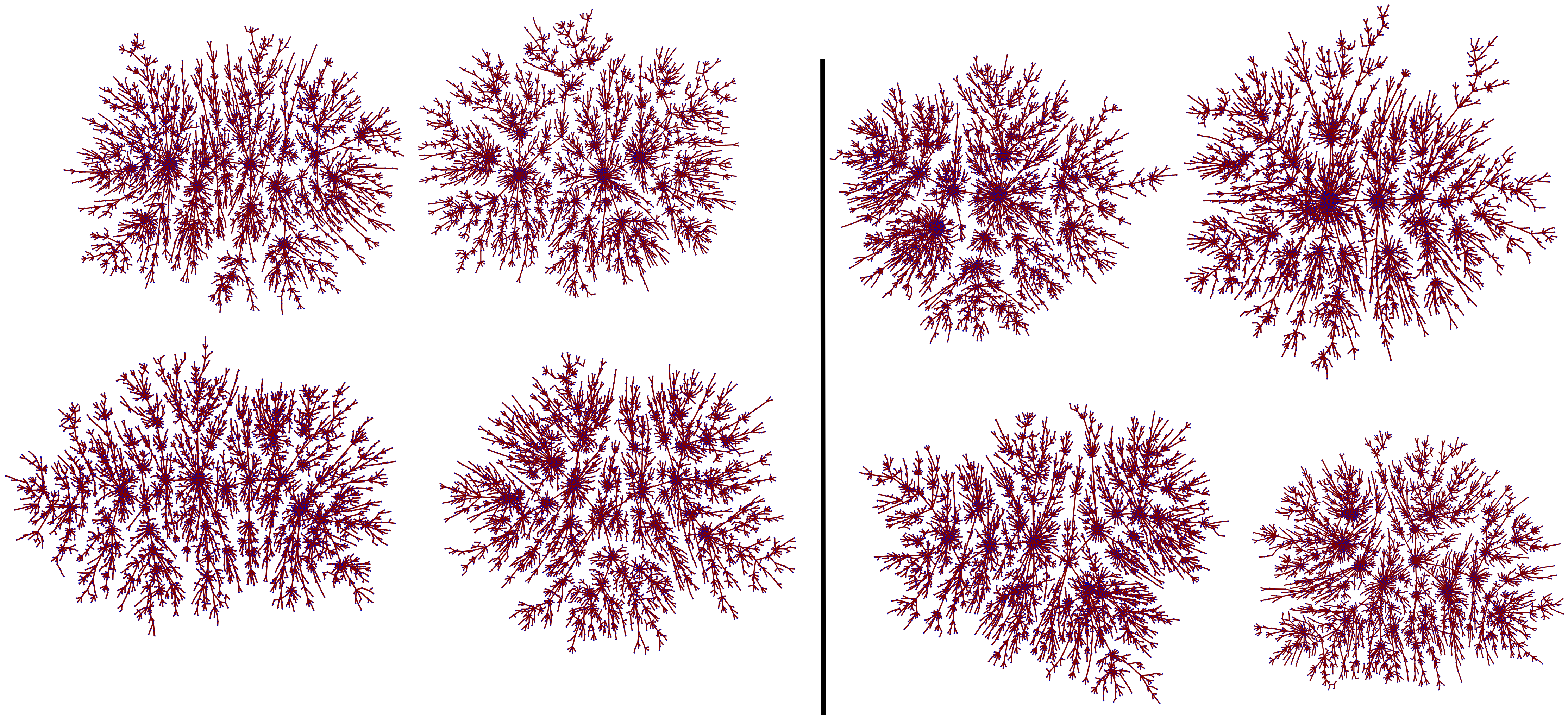


Quatre simulations de $T_n^{(S_2')}$ for $n = 5000$ :



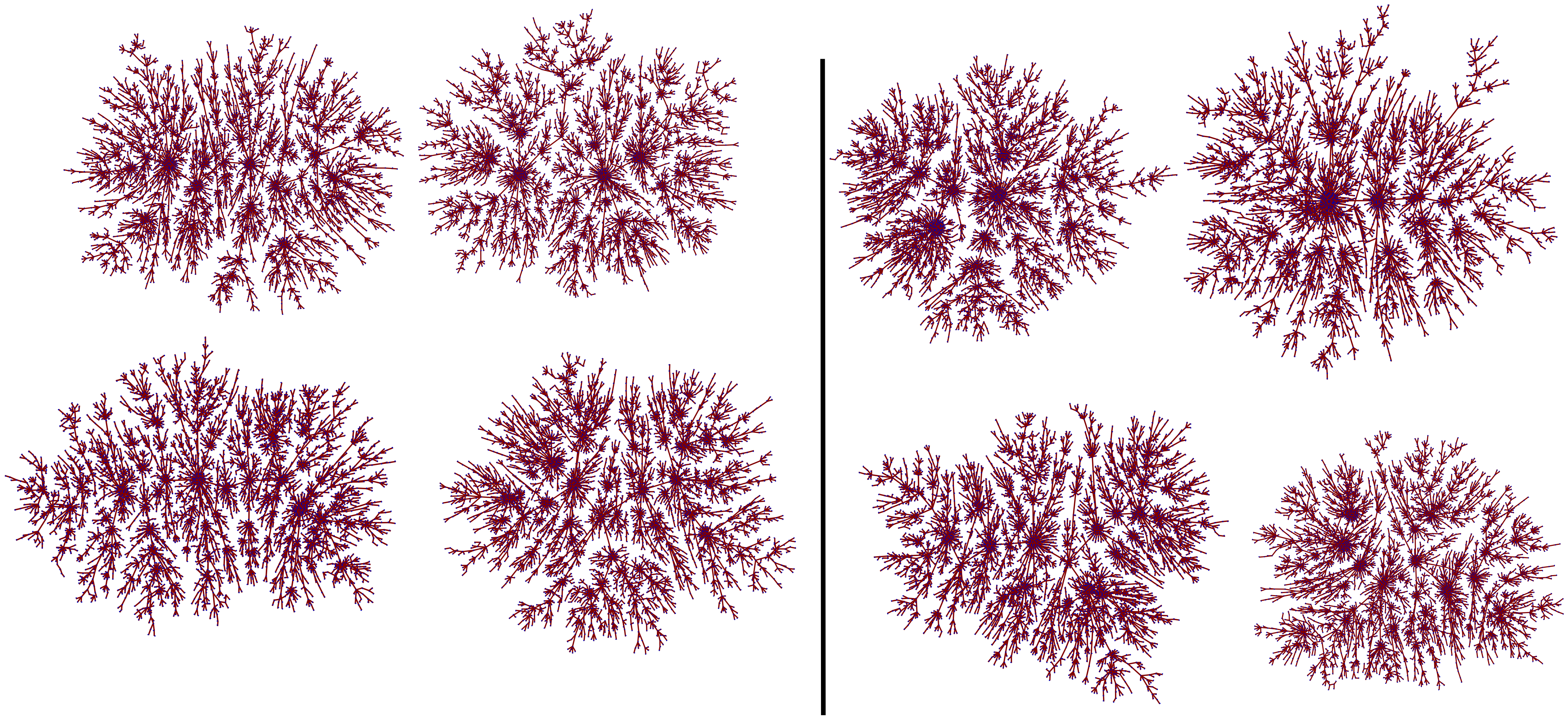
# *Referendum*

Quatre simulations de $T_n^{(S_1')}$, $T_n^{(S_2')}$ for $n = 5000$ :



# *Referendum*

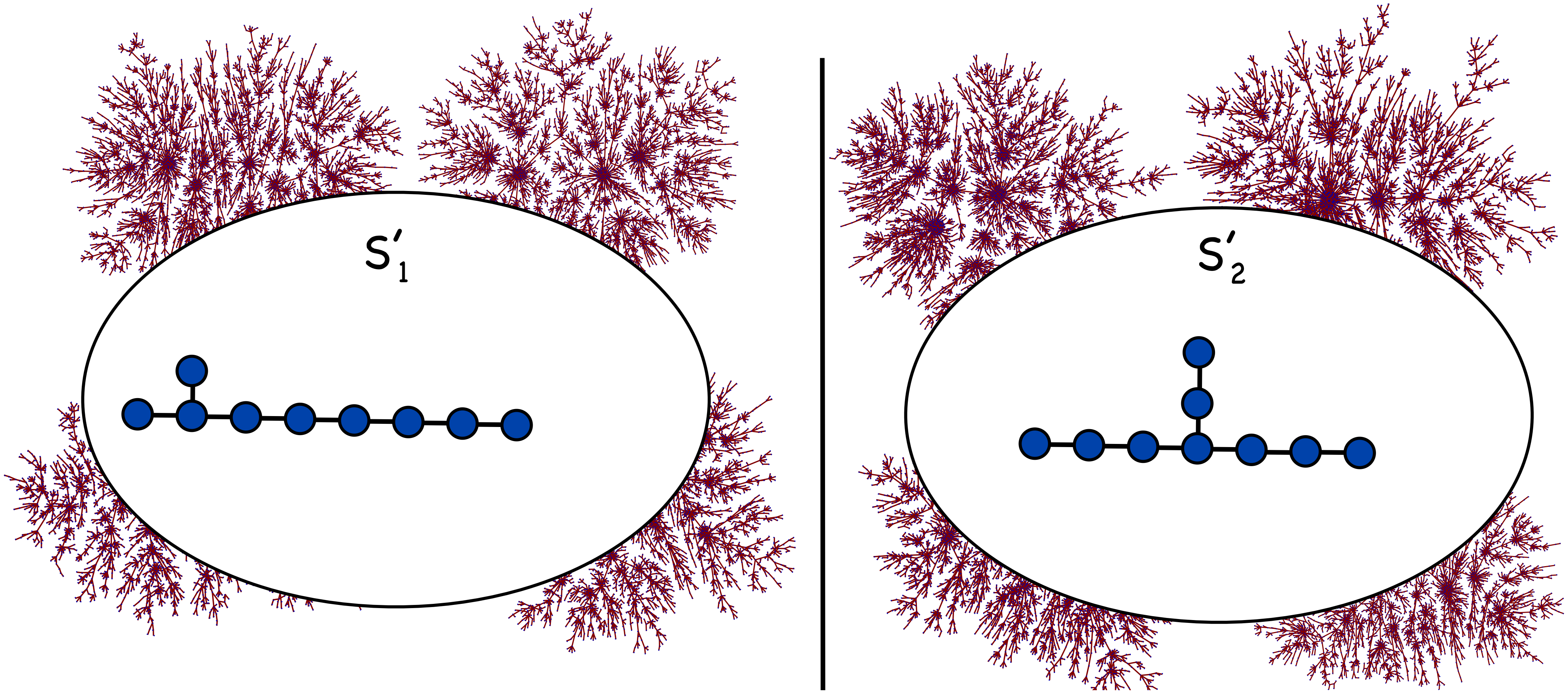
Quatre simulations de $T_n^{(S_1')}$, $T_n^{(S_2')}$ for $n = 5000$ :



A-t-on $S_1' = S_2'$ ?

# Referendum

Quatre simulations de $T_n^{(S_1')}$, $T_n^{(S_2')}$ for $n = 5000$ :




A-t-on $S_1' = S_2'$ ?

# Influence de l'arbre initial

Si $S_1$ et $S_2$ sont des arbres finis, on pose

$$d(S_1, S_2) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{d_{TV}}(\mathsf{T}_n^{(S_1)}, \mathsf{T}_n^{(S_2)}),$$

où $d_{TV}$ est la distance en variation totale entre des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des arbres finis

# *Influence de l'arbre initial*

Si $S_1$ et $S_2$ sont des arbres finis, on pose

$$d(S_1, S_2) = \lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}),$$

où $d_{TV}$ est la distance en variation totale entre des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des arbres finis ($d_{TV}(X, Y) = \sup_A |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$).

# *Influence de l'arbre initial*

Si $S_1$ et $S_2$ sont des arbres finis, on pose

$$d(S_1, S_2) = \lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}),$$

où $d_{TV}$ est la distance en variation totale entre des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des arbres finis ($d_{TV}(X, Y) = \sup_A |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$).

## Proposition (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une pseudo-métrique.

# *Influence de l'arbre initial*

Si $S_1$ et $S_2$ sont des arbres finis, on pose

$$d(S_1, S_2) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{d_{TV}}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}),$$

où $d_{TV}$ est la distance en variation totale entre des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des arbres finis ($d_{TV}(X, Y) = \sup_A |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$).

## Proposition (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une pseudo-métrique.

## Conjecture (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une métrique sur l'ensemble des arbres à au moins 3 sommets.

# Influence de l'arbre initial

Si $S_1$ et $S_2$ sont des arbres finis, on pose

$$d(S_1, S_2) = \lim_{n \to \infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}),$$

où $d_{TV}$ est la distance en variation totale entre des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des arbres finis ($d_{TV}(X, Y) = \sup_A |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$).

## Proposition (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une pseudo-métrique.

## Conjecture (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une métrique sur l'ensemble des arbres à au moins 3 sommets.

Bubeck, Mossel & Rácz ont montré ce résultat quand $S_1$ et $S_2$ **n'ont pas** la même suite de degrés en étudiant le comportement du degré maximal de $T_n^{(S)}$.

# Influence de l'arbre initial

Si $S_1$ et $S_2$ sont des arbres finis, on pose

$$d(S_1, S_2) = \lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}),$$

où $d_{TV}$ est la distance en variation totale entre des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des arbres finis ($d_{TV}(X, Y) = \sup_A |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$).

## Proposition (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une pseudo-métrique.

## Conjecture (Bubeck, Mossel & Rácz '14)

La fonction $d$ est une métrique sur l'ensemble des arbres à au moins 3 sommets.

Bubeck, Mossel & Rácz ont montré ce résultat quand $S_1$ et $S_2$ **n'ont pas** la même suite de degrés en étudiant le comportement du degré maximal de $T_n^{(S)}$.

**Théorème** (Curien, Duquesne, K. & Manolescu '14)**.**

La conjecture est vraie.

# Arbres plans construits par attachement préférentiel

Soit $(\mathsf{T}_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres **plans** construits récursivement comme suit :

# *Arbres plans construits par attachement préférentiel*

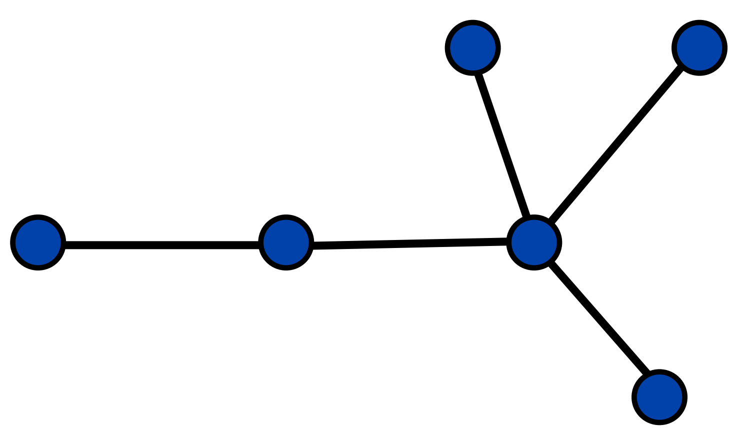
Soit $(\mathsf{T}_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres **plans** construits récursivement comme suit :

- $\mathsf{T}_k^{(S)} = S$ est un arbre **plan** avec $k$ sommets,

# Arbres plans construits par attachement préférentiel

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres **plans** construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre **plan** avec $k$ sommets,
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en ajoutant une arête à l'intérieur d'un **coin** de $T_n^{(S)}$

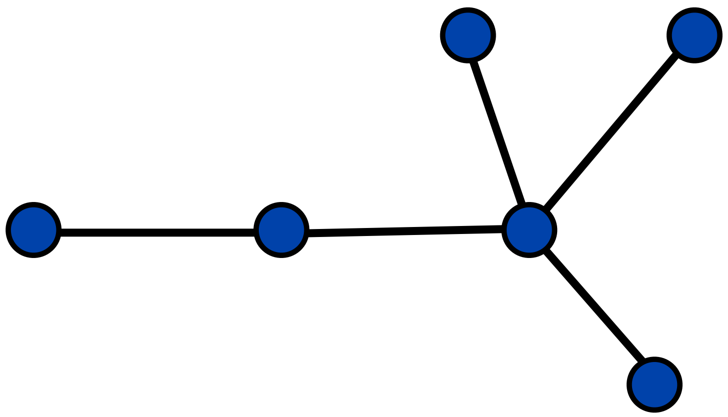


S

# Arbres plans construits par attachement préférentiel

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres **plans** construits récursivement comme suit :

- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre **plan** avec $k$ sommets,
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en ajoutant une arête à l'intérieur d'un **coin** de $T_n^{(S)}$ choisi **uniformément** au hasard.

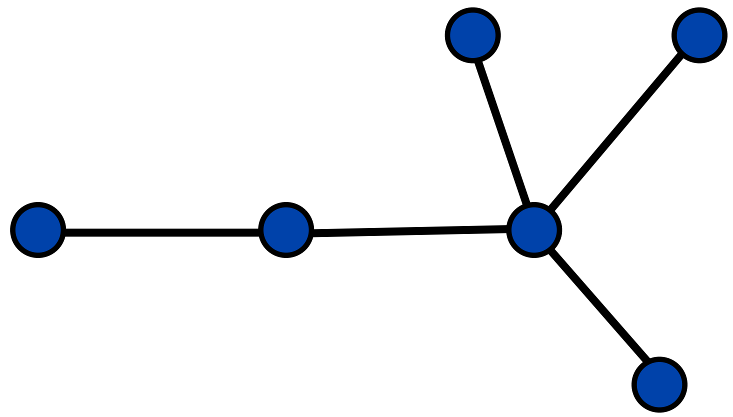


S

# *Arbres plans construits par attachement préférentiel*

Soit $(T_n^{(S)})_{n \geqslant k}$ une suite d'arbres **plans** construits récursivement comme suit :

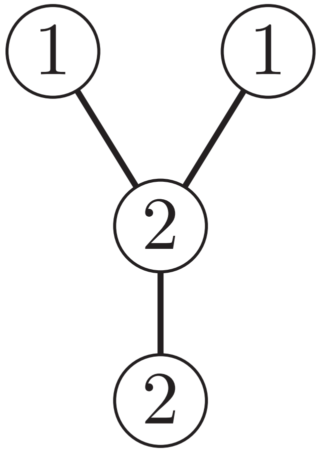
- $T_k^{(S)} = S$ est un arbre **plan** avec $k$ sommets,
- pour tout $n \geqslant k$, $T_{n+1}^{(S)}$ est obtenu à partir de $T_n^{(S)}$ en ajoutant une arête à l'intérieur d'un **coin** de $T_n^{(S)}$ choisi **uniformément** au hasard.



$\leadsto$ La structure de graphe de $T_n^{(S)}$ est celle des arbres construits par attachement préférentiel.

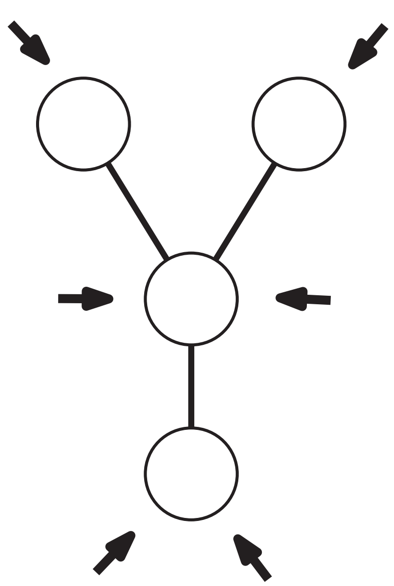
# Nos observables : plongements de sapins de Noël

Un sapin de Noël $\tau$ est un arbre $\tau$ dont les sommets sont étiquetés par des entiers strictement positifs $(\ell(u), u \in \tau)$.



# Nos observables : plongements de sapins de Noël

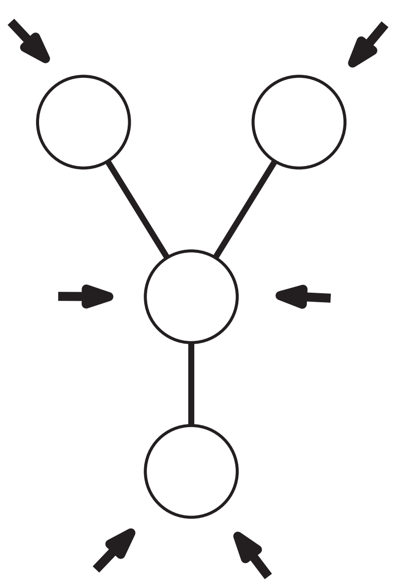
Un sapin de Noël $\tau$ est un arbre $\tau$ dont les sommets sont étiquetés par des entiers strictement positifs $(\ell(u), u \in \tau)$. On interprète les étiquettes comme $\ell(u)$ flèches indistingables pointant vers chaque sommet $u \in \tau$.

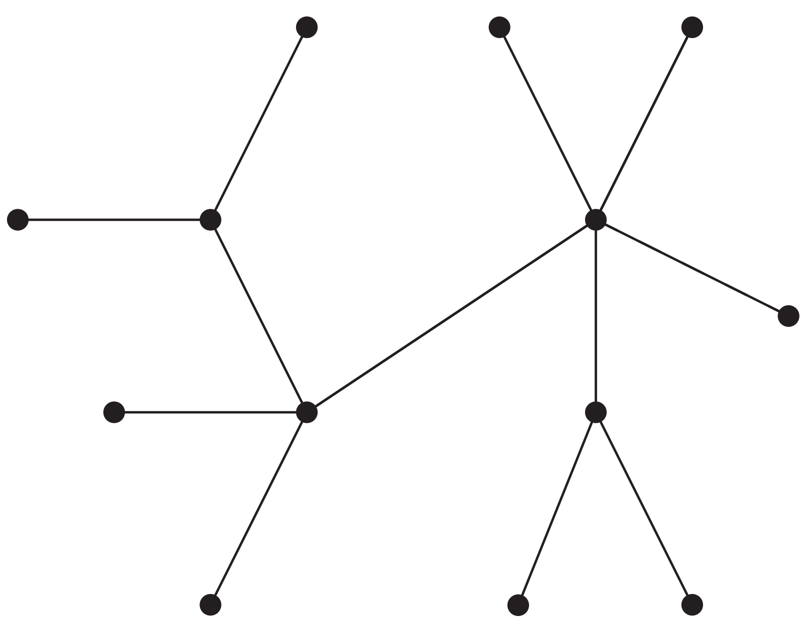


# *Nos observables : plongements de sapins de Noël*

Un sapin de Noël $\tau$ est un arbre $\tau$ dont les sommets sont étiquetés par des entiers strictement positifs $(\ell(u), u \in \tau)$. On interprète les étiquettes comme $\ell(u)$ flèches indistingables pointant vers chaque sommet $u \in \tau$.

Si $T$ est un arbre plan, on note $D_\tau(T)$ le nombre de plongements décorés de $\tau$ dans $T$.



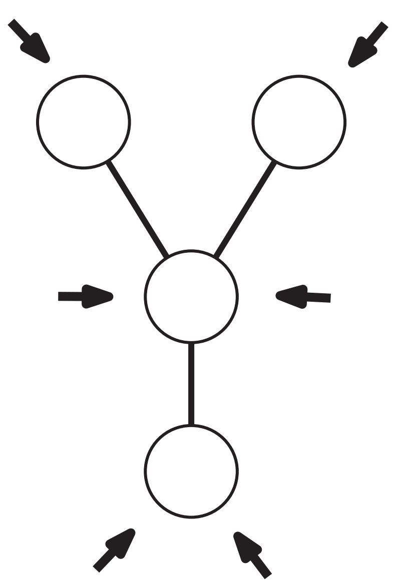


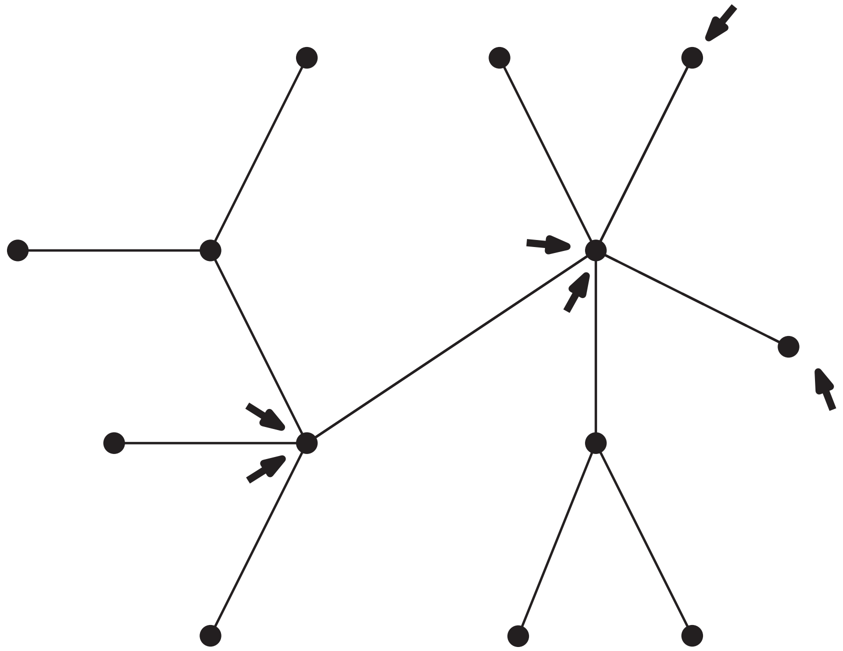
# Nos observables : plongements de sapins de Noël

Un sapin de Noël $\boldsymbol{\tau}$ est un arbre $\tau$ dont les sommets sont étiquetés par des entiers strictement positifs $(\ell(u), u \in \tau)$. On interprète les étiquettes comme $\ell(u)$ flèches indistingables pointant vers chaque sommet $u \in \tau$.

Si $T$ est un arbre plan, on note $D_{\boldsymbol{\tau}}(T)$ le nombre de plongements décorés de $\boldsymbol{\tau}$ dans $T$.

C-à-d $D_{\boldsymbol{\tau}}(T)$ est le nombre de manières de plonger $\tau$ dans $T$ de sorte que chaque flèche pointant vers un sommet de $\tau$ est associée à un coin de $T$ adjacent au sommet correspondant (des flèches différentes sont nécessairement associées à des coins différents).





# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) : \boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) \cdot D_{\boldsymbol{\tau'}}(T_n^{(S)})$$

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') : \boldsymbol{\tau}' \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau}' \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') \cdot D_{\boldsymbol{\tau}'}(T_n^{(S)})$$

est une martingale

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) : \boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) \cdot D_{\boldsymbol{\tau'}}(T_n^{(S)})$$

est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$.

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) : \boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) \cdot D_{\boldsymbol{\tau'}}(T_n^{(S)})$$

est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$.

Preuve de la conjecture, c-à-d $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) > 0$ .

.

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) : \boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) \cdot D_{\boldsymbol{\tau'}}(T_n^{(S)})$$

est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$.

Preuve de la conjecture, c-à-d $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) > 0$ .

Si $S_1 \neq S_2$, il existe un sapin de Noël $\boldsymbol{\tau}$ et $n_0$ tels que $\mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_1)}(n_0)\right] \neq \mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_2)}(n_0)\right]$.

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) : \boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau'} \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau'}) \cdot D_{\boldsymbol{\tau'}}(T_n^{(S)})$$

est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$.

## Preuve de la conjecture, c-à-d $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) > 0$ .

Si $S_1 \neq S_2$, il existe un sapin de Noël $\boldsymbol{\tau}$ et $n_0$ tels que $\mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_1)}(n_0)\right] \neq \mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_2)}(n_0)\right]$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) \geqslant \liminf_{n\to\infty} d_{TV}(M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_1)}(n), M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_2)}(n))$$

# Nos observables : plongements de sapins de Noël

**Proposition.**

Il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des sapins de Noël, tel que pour chaque sapin $\boldsymbol{\tau}$, il existe des constantes $\{c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') : \boldsymbol{\tau}' \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}, n \geqslant 2\}$ telles que, pour tout arbre plan initial $S$,

$$M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S)}(n) = \sum_{\boldsymbol{\tau}' \preccurlyeq \boldsymbol{\tau}} c_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') \cdot D_{\boldsymbol{\tau}'}(T_n^{(S)})$$

est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$.

## Preuve de la conjecture, c-à-d $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) > 0$ .

Si $S_1 \neq S_2$, il existe un sapin de Noël $\boldsymbol{\tau}$ et $n_0$ tels que $\mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_1)}(n_0)\right] \neq \mathbb{E}\left[M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_2)}(n_0)\right]$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} d_{TV}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) \geqslant \liminf_{n\to\infty} d_{TV}(M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_1)}(n), M_{\boldsymbol{\tau}}^{(S_2)}(n)) > 0.$$

**I.** INFLUENCE DE LA CONDITION INITIALE

**II.** LIMITES D'ÉCHELLE *via* LES « ARBRES À BOUCLES »

**III.** $=$ **I.** $+$**II.**

**IV.** AUTRES « ARBRES À BOUCLES »

$\rightsquigarrow$ **Question.** Est-ce que la suite $(\mathrm{T}_n^{(S)})$ admet une limite d'échelle ?

**Question.** Est-ce que la suite $(T_n^{(S)})$ admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de $T_n^{(S)}$ est de l'ordre de $\log(n)$ :

**Question.** Est-ce que la suite $(T_n^{(S)})$ admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de $T_n^{(S)}$ est de l'ordre de $\log(n)$ : Est-ce que

$$\frac{1}{\log(n)} \cdot T_n^{(S)}$$

converge vers un espace métrique compact limite

**Question.** Est-ce que la suite $(T_n^{(S)})$ admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de $T_n^{(S)}$ est de l'ordre de $\log(n)$ : Est-ce que

$$\frac{1}{\log(n)} \cdot T_n^{(S)}$$

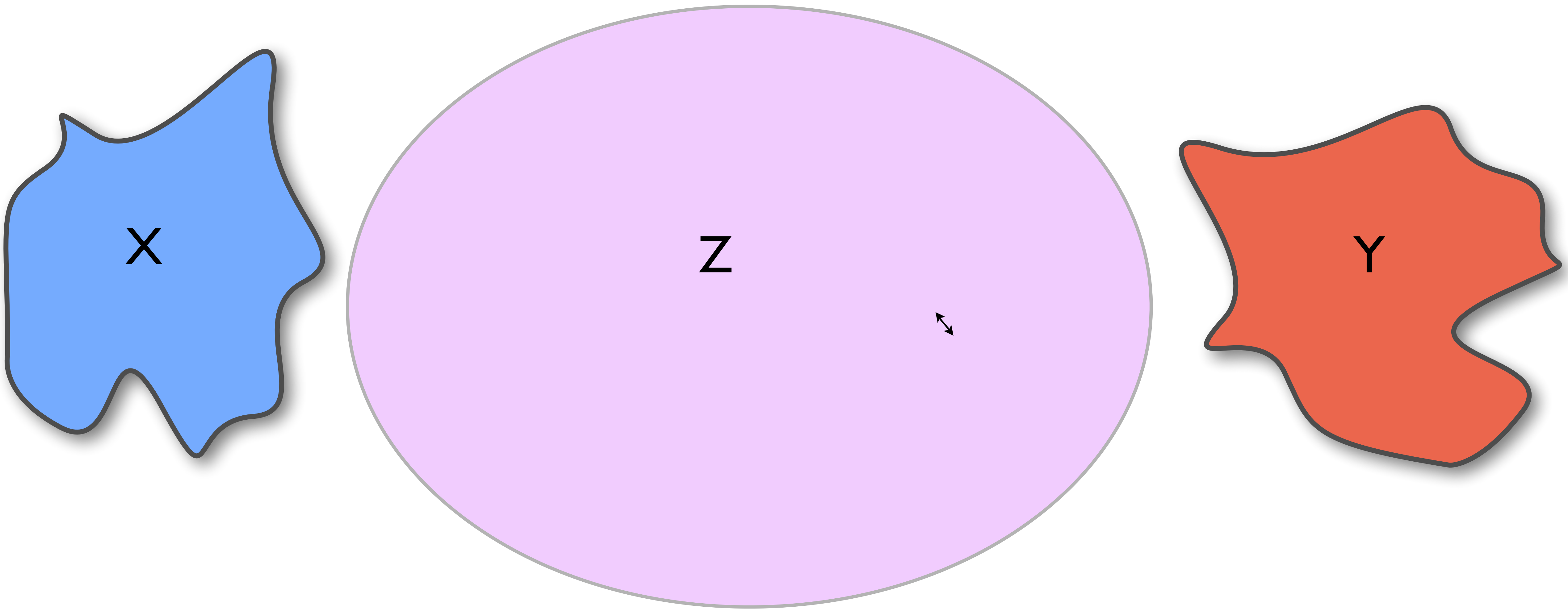
converge vers un espace métrique compact limite en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff ?

# La distance de Gromov–Hausdorff

Soient $X, Y$ deux espaces métriques compacts.

# La distance de Gromov–Hausdorff

Soient $X, Y$ deux espaces métriques compacts.




La distance de Gromov–Hausdorff entre $X$ et $Y$ est l'infimum des distances de Hausdorff entre tous les plongements isométriques possibles de $X$ et $Y$ dans un même espace métrique $Z$.

$\rightsquigarrow$ **Question.** Est-ce que la suite $(\mathsf{T}_n^{(S)})$ admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de $\mathsf{T}_n^{(S)}$ est de l'ordre de $\log(n)$ : Est-ce que

$$\frac{1}{\log(n)} \cdot \mathsf{T}_n^{(S)}$$

converge vers un espace métrique compact limite en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff ?

**Question.** Est-ce que la suite $(T_n^{(S)})$ admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de $T_n^{(S)}$ est de l'ordre de $\log(n)$ : Est-ce que

$$\frac{1}{\log(n)} \cdot T_n^{(S)}$$

converge vers un espace métrique compact limite en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff ?

**Réponse :** non.

# *Arbres à boucles discrets*

Si $\tau$ est un arbre **plan**, on définit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme le graphe obtenu à partir de $\tau$

# *Arbres à boucles discrets*

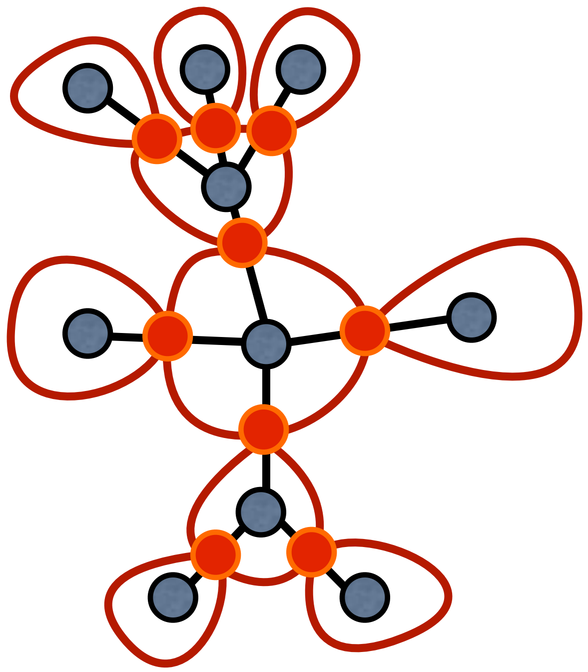
Si $\tau$ est un arbre **plan**, on définit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme le graphe obtenu à partir de $\tau$

☞ en remplaçant chaque sommet $u$ par une boucle avec $\deg(u)$ sommets,

# *Arbres à boucles discrets*

Si $\tau$ est un arbre **plan**, on définit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme le graphe obtenu à partir de $\tau$

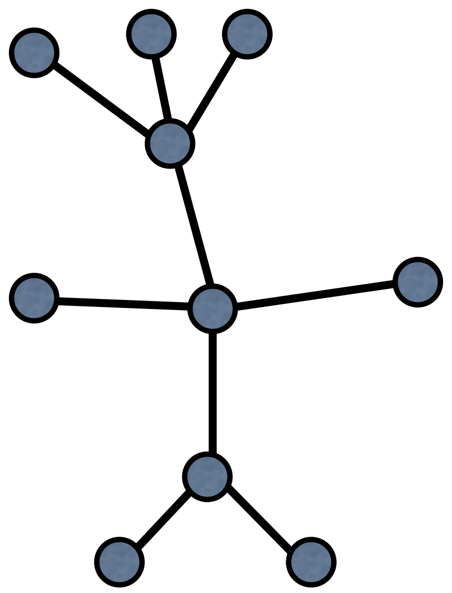
- ☞ en remplaçant chaque sommet $u$ par une boucle avec $\deg(u)$ sommets,
- ☞ puis en collant ces boucles suivant la structure d'arbre de $\tau$.

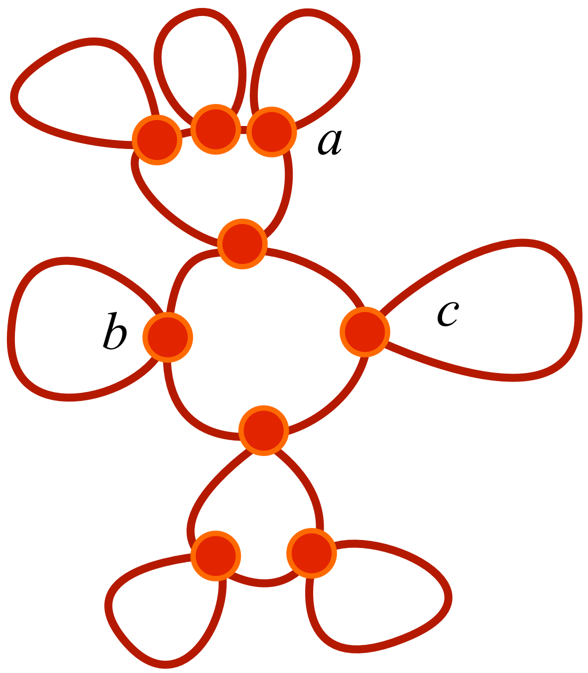


# Arbres à boucles discrets

Si $\tau$ est un arbre **plan**, on définit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme le graphe obtenu à partir de $\tau$

- en remplaçant chaque sommet $u$ par une boucle avec $\deg(u)$ sommets,
- puis en collant ces boucles suivant la structure d'arbre de $\tau$.



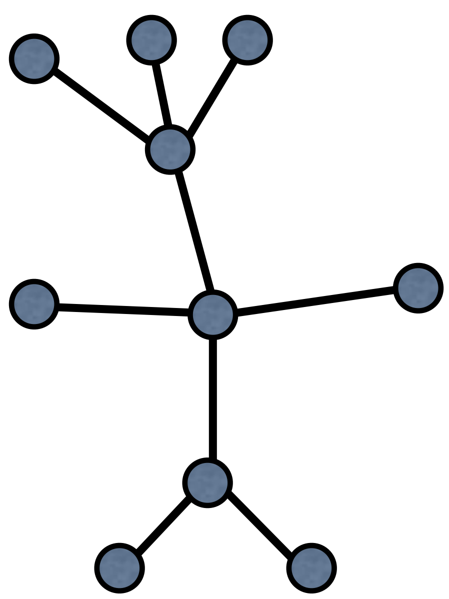


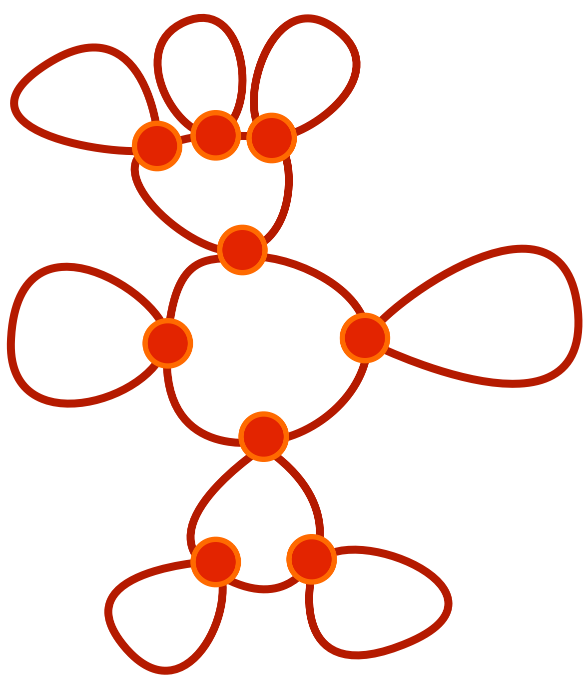

On voit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme un espace métrique compact. *d(a,b)=2; d(a,c)=3; d(b,c)=3*

# *Arbres à boucles discrets*

Si $\tau$ est un arbre **plan**, on définit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme le graphe obtenu à partir de $\tau$

- ☞ en remplaçant chaque sommet $u$ par une boucle avec $\deg(u)$ sommets,
- ☞ puis en collant ces boucles suivant la structure d'arbre de $\tau$.





On voit $\mathrm{Loop}(\tau)$ comme un espace métrique compact.

⇝ Très grossièrement, un arbre à boucles code la structure géométrique des sommets de grands degré de l'arbre.

# Limites d'échelle

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu)**.**

Soit $S$ un arbre plan. Il existe un espace métrique compact $\mathcal{L}^{(S)}$ tel que :

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(\mathsf{T}_n^{(S)}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathcal{L}^{(S)},$$

où la convergence a lieu p.s. pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

# Limites d'échelle

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu)**.**

Soit $S$ un arbre plan. Il existe un espace métrique compact $\mathcal{L}^{(S)}$ tel que :

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(T_n^{(S)}) \quad \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \quad \mathcal{L}^{(S)},$$

où la convergence a lieu p.s. pour la topologie de Gromov–Hausdorff. Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}^{(S)}$ vaut 2.

# Limites d'échelle

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu)**.**

Soit $S$ un arbre plan. Il existe un espace métrique compact $\mathcal{L}^{(S)}$ tel que :

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(T_n^{(S)}) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \quad \mathcal{L}^{(S)},$$

où la convergence a lieu p.s. pour la topologie de Gromov–Hausdorff. Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}^{(S)}$ vaut 2.

Quand $S = \multimap$ est un arbre plan avec un sommet, $\mathcal{L}^{(\multimap)}$ est appelé « arbre à boucles brownien ».

# Limites d'échelle

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu)**.**

Soit $S$ un arbre plan. Il existe un espace métrique compact $\mathcal{L}^{(S)}$ tel que :

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(T_n^{(S)}) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \quad \mathcal{L}^{(S)},$$

où la convergence a lieu p.s. pour la topologie de Gromov–Hausdorff. Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}^{(S)}$ vaut 2.

Quand $S = \!\!-\!\!\circ$ est un arbre plan avec un sommet, $\mathcal{L}^{(-\circ)}$ est appelé « arbre à boucles brownien ».

$\leadsto$ $n^{1/2}$ est l'ordre de grandeur du degré maximal de $T_n^{(S)}$.

# Limites d'échelle

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu).

Soit $S$ un arbre plan. Il existe un espace métrique compact $\mathcal{L}^{(S)}$ tel que :

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(\mathsf{T}_n^{(S)}) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad \mathcal{L}^{(S)},$$

où la convergence a lieu p.s. pour la topologie de Gromov–Hausdorff. Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}^{(S)}$ vaut 2.

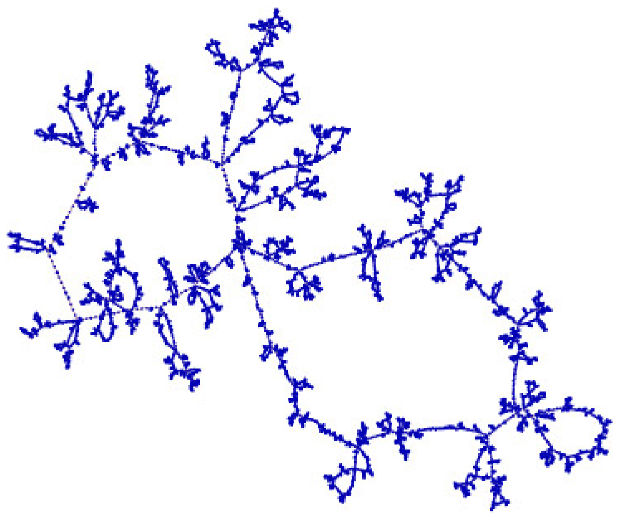
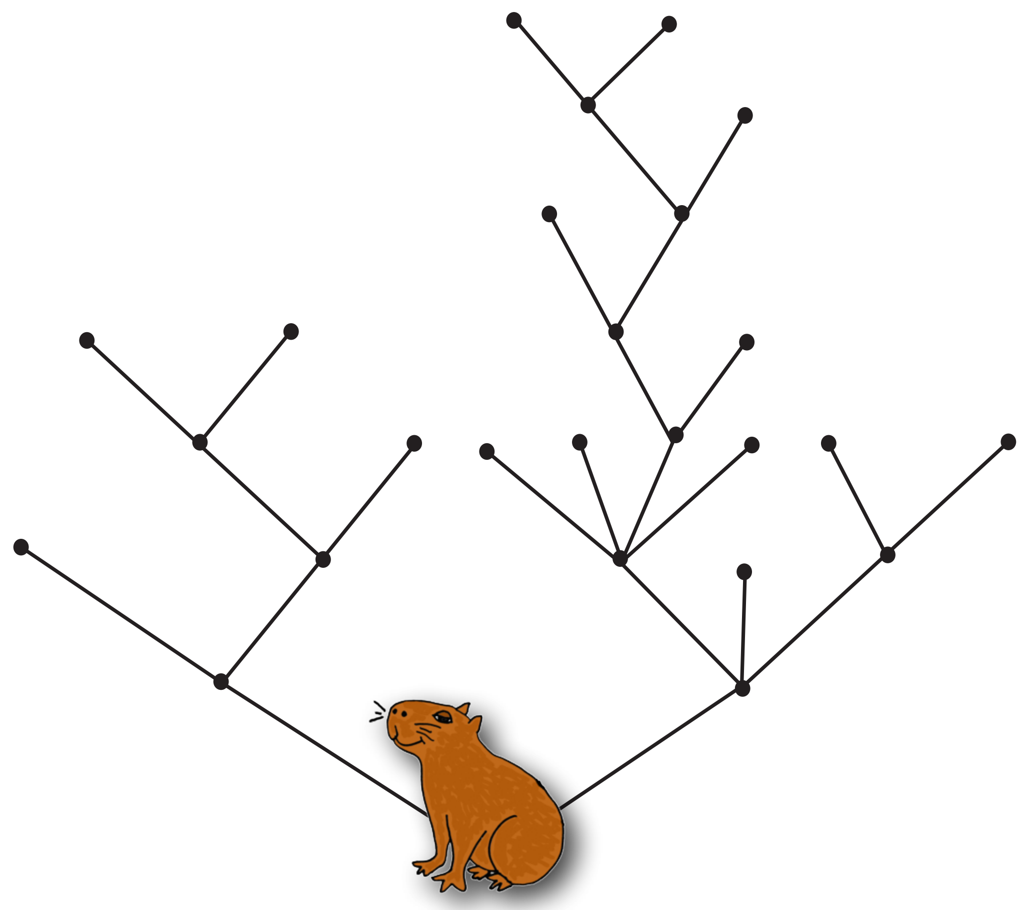
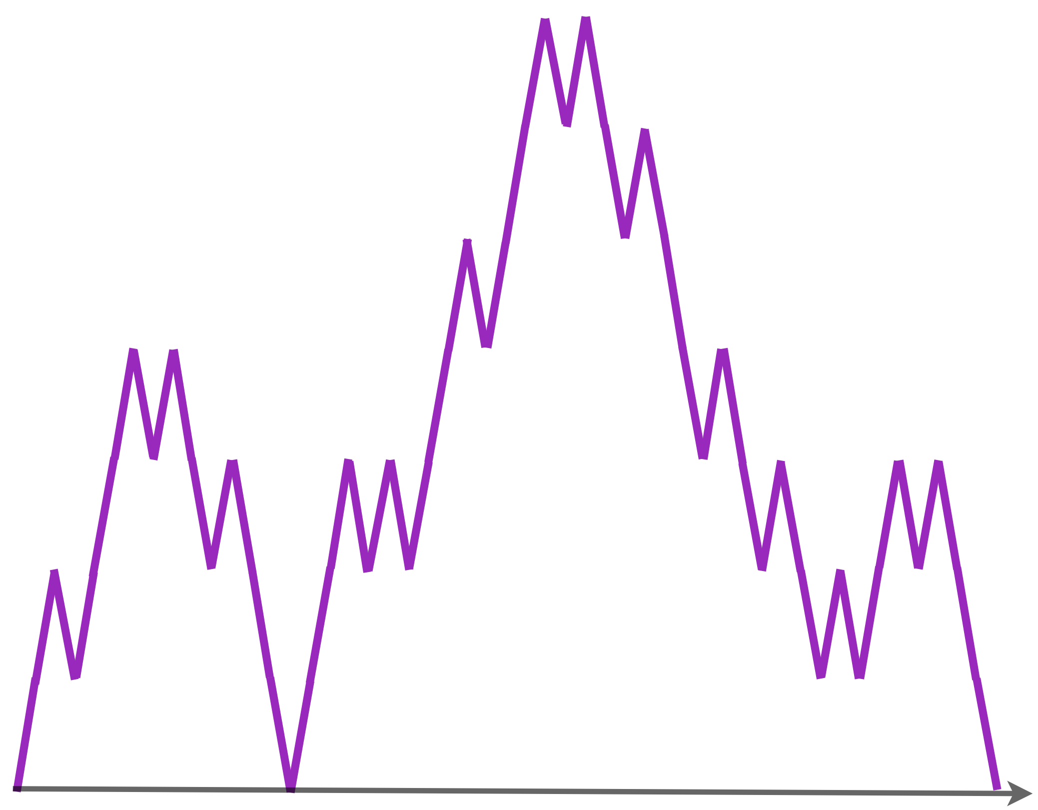


Figure: L'arbre à boucles discret d'un grand arbre construit par attachement préférentiel.

# Qu'est-ce que l'arbre brownien ?

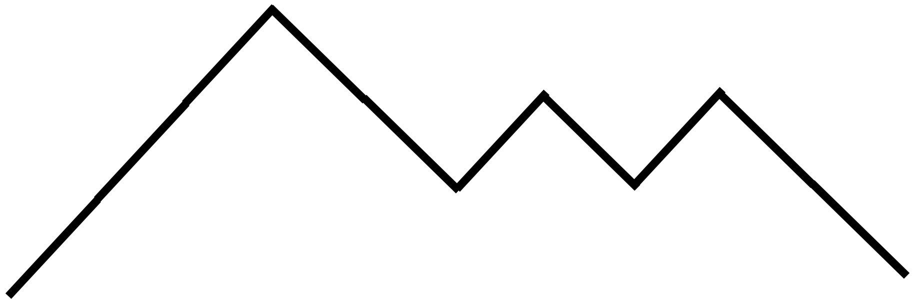
On définit d'abord la fonction de contour d'un arbre plan :





# *Qu'est-ce que l'arbre brownien ?*

Connaissant la fonction de contour, il est facile de retrouver l'arbre parcollage :



# *Qu'est-ce que l'arbre brownien ?*

L'arbre brownien $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ est obtenu en collant l'excursion brownienne $\mathbf{e}$.

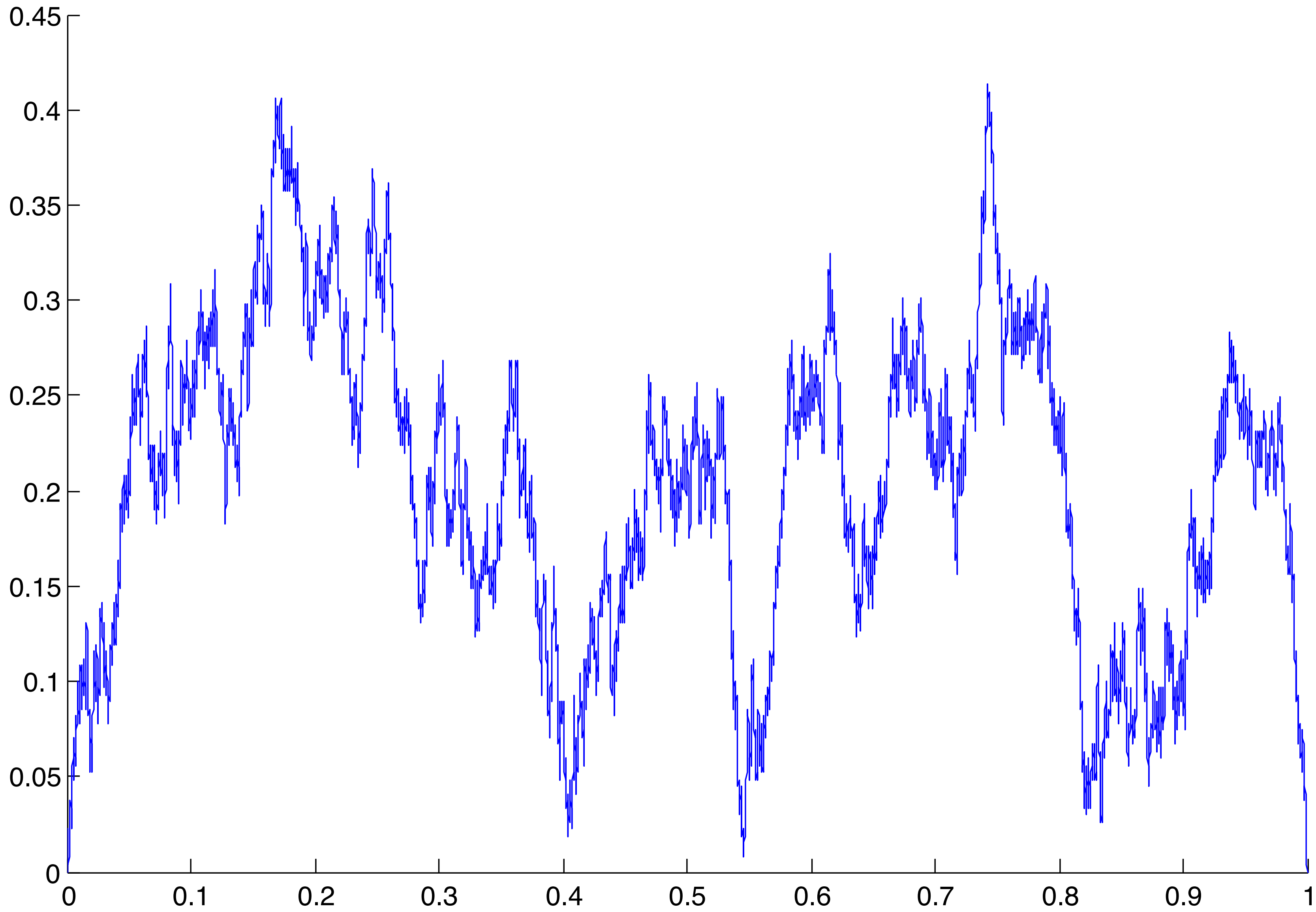



Figure: Une simulation de $\mathbf{e}$.

# *Une simulation de l'arbre brownien*

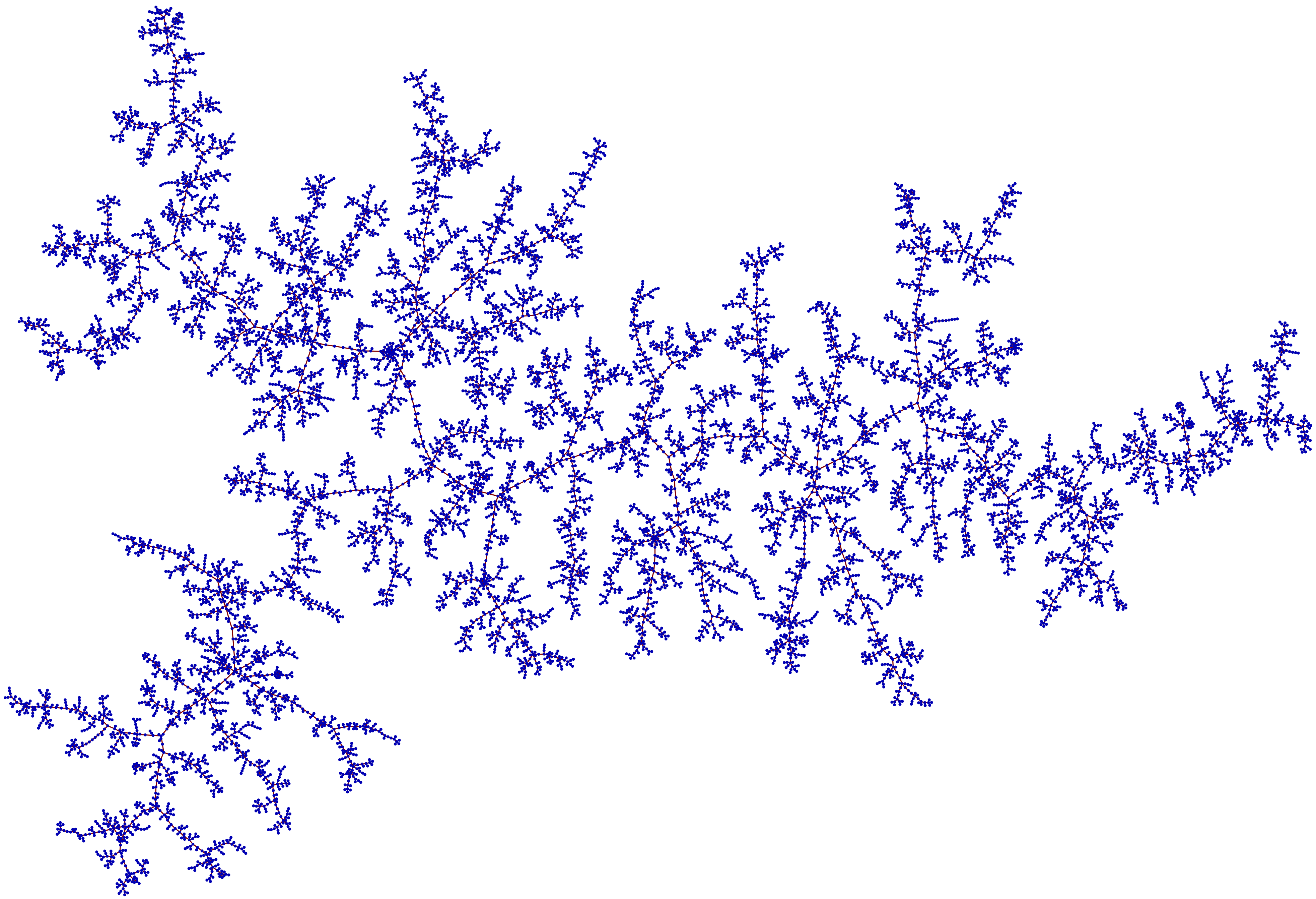


Figure: Un plongement non isométrique d'une réalisation de $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$.

# Construction de l'arbres à boucles brownien

Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de points i.i.d. uniformes de l'arbre brownien $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$.

# Construction de l'arbres à boucles brownien

Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de points i.i.d. uniformes de l'arbre brownien $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$. On définit $\mathcal{L}^{(-\circ)}$ en faisant les identifications suivantes $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ :

# Construction de l'arbres à boucles brownien

Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de points i.i.d. uniformes de l'arbre brownien $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$. On définit $\mathcal{L}^{(\multimap)}$ en faisant les identifications suivantes $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ :

- $X_1$ avec $X_0$

# Construction de l'arbres à boucles brownien

Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de points i.i.d. uniformes de l'arbre brownien $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$. On définit $\mathcal{L}^{(\multimap)}$ en faisant les identifications suivantes $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ :

- $X_1$ avec $X_0$
- pour $i \geqslant 2$, $X_i$ avec $P_i$, qui est le sommet de $\mathrm{Span}(\mathcal{T}_{\mathbf{e}}; X_0, X_1, \ldots, X_{i-1})$ qui est le plus proche de $X_i$.

# Construction de l'arbres à boucles brownien

Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de points i.i.d. uniformes de l'arbre brownien $\mathcal{T}_e$. On définit $\mathcal{L}^{(\multimap)}$ en faisant les identifications suivantes $\mathcal{T}_e$ :

- $X_1$ avec $X_0$
- pour $i \geqslant 2$, $X_i$ avec $P_i$, qui est le sommet de $\mathrm{Span}(\mathcal{T}_e; X_0, X_1, \ldots, X_{i-1})$ qui est le plus proche de $X_i$.

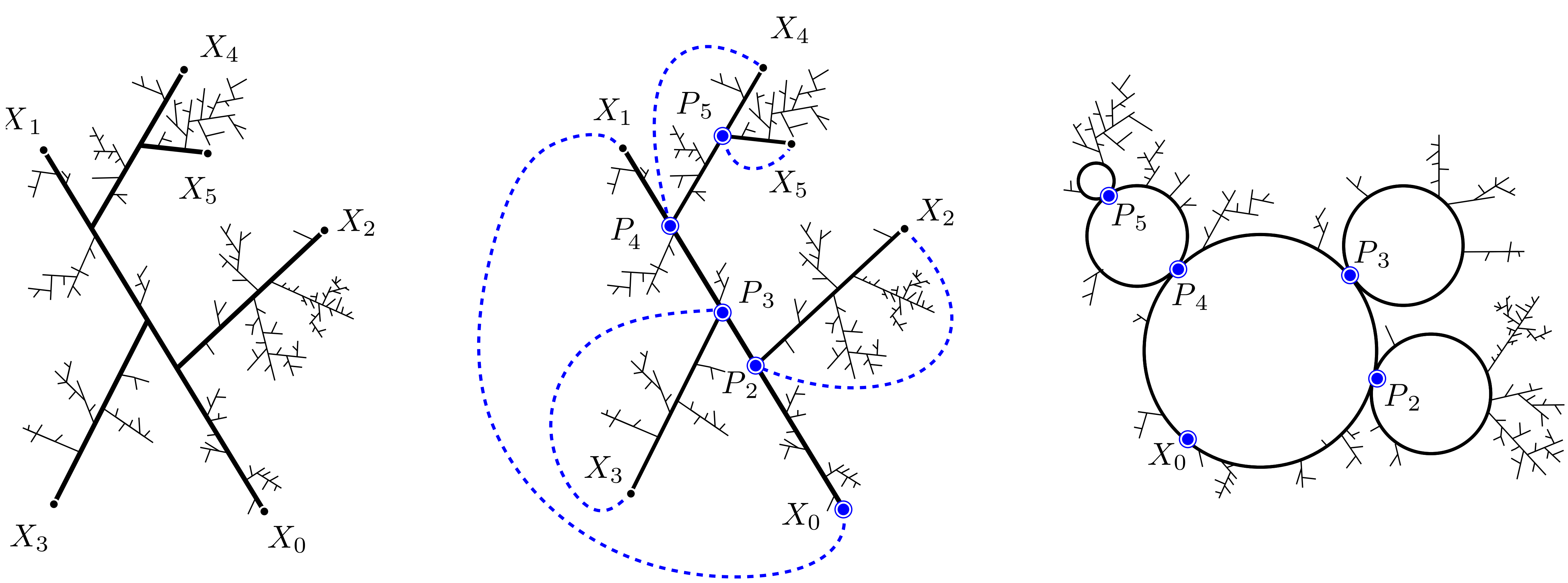



Figure: Construction de l'arbre à boucles brownien $\mathcal{L}^{(\multimap)}$ comme un quotient de l'arbre brownien.

# *Idée principale : couplage avec l'algorithme de Rémy*

Pourquoi a-t-on

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(T_n^{(-\circ)}) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \quad \mathcal{L}^{(-\circ)} ?$$

# *Idée principale : couplage avec l'algorithme de Rémy*

Pourquoi a-t-on

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(\mathsf{T}_n^{(\multimap)}) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \quad \mathcal{L}^{(\multimap)}?$$

$\leadsto$ **Idée principale** : couplage entre $\mathsf{T}_n^{(\multimap)}$ et l'algorithme de Rémy (qui génère récursivement des arbres binaires uniformes), dû à Peköz, Ross & Röllin '14.

**I.** Influence de la condition initiale

**II.** Limites d'échelle *via* les « arbres à boucles »

**III. = I. + II.**

**IV.** Autres « arbres à boucles »

# Conjectures et extensions

**Question.**

Que se passe-t-il pour l'attachement préférentiel linéaire, où au lieu de choisir un sommet $u$ proportionnellement à $\deg(u)$, on le choisit proportionnellement à $\deg(u) + a$ avec $a > -1$ ?

# Conjectures et extensions

**Question.**

Que se passe-t-il pour l'attachement préférentiel linéaire, où au lieu de choisir un sommet $u$ proportionnellement à $\deg(u)$, on le choisit proportionnellement à $\deg(u) + a$ avec $a > -1$ ?

**Conjecture.**

Si $S_1, S_2$ sont deux arbres plans, on a

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathsf{TV}}(T_n^{(S_1)}, T_n^{(S_2)}) = d_{\mathsf{TV}}(\mathcal{L}^{(S_1)}, \mathcal{L}^{(S_2)}).$$

**I.** Influence de la condition initiale

**II.** Limites d'échelle *via* les « arbres à boucles »

**III.** = **I.** + **II.**

## **IV.** Autres « arbres à boucles »

# *Que se passe-t-il pour des arbres de BGW ?*

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-arbre aléatoire de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir $n$ sommets.

# *Que se passe-t-il pour des arbres de BGW ?*

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-arbre aléatoire de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir $n$ sommets. Est-ce que $\mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n)$ a un limite d'échelle ?

# *Que se passe-t-il pour des arbres de BGW ?*

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-arbre aléatoire de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir $n$ sommets. Est-ce que $\mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n)$ a un limite d'échelle ?

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13)**.**

Si $\mu$ a une variance finie $\sigma^2$ (et un moment exponentiel fini), alors

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)}$$

# *Que se passe-t-il pour des arbres de BGW ?*

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-arbre aléatoire de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir $n$ sommets. Est-ce que $\mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n)$ a un limite d'échelle ?

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13)**.**

Si $\mu$ a une variance finie $\sigma^2$ (et un moment exponentiel fini), alors

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_e.$$

# *Que se passe-t-il pour des arbres de BGW ?*

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-arbre aléatoire de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir $n$ sommets. Est-ce que $\mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n)$ a un limite d'échelle ?

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13)**.**

Si $\mu$ a une variance finie $\sigma^2$ (et un moment exponentiel fini), alors

$$n^{-1/2} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \frac{2}{\sigma} \cdot \frac{1}{4} \left(\sigma^2 + 4 - (\mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \cdots)\right) \cdot \mathcal{T}_e.$$

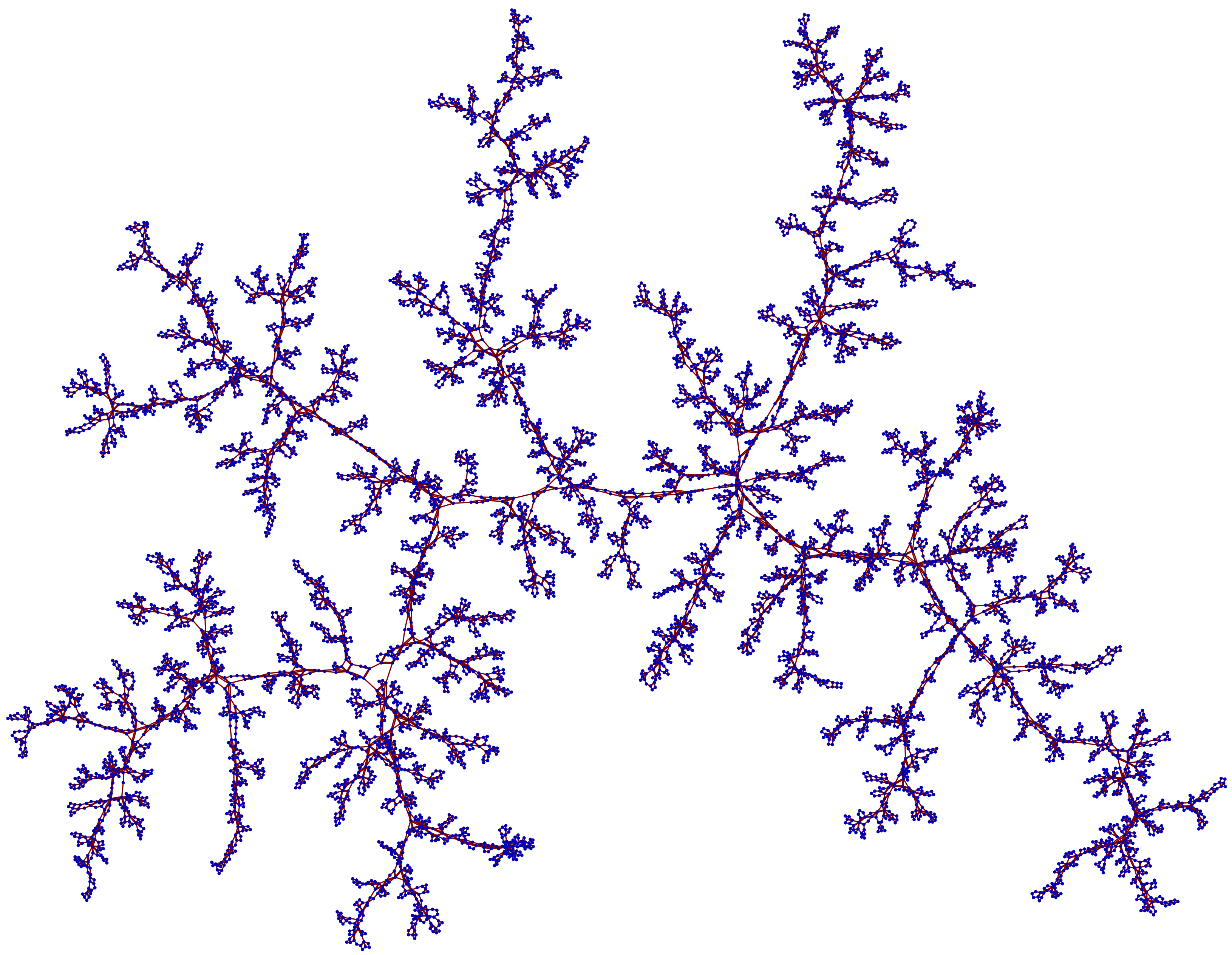


Figure: Un plongement non isométrique de l'arbre à boucles d'un grand arbre aléatoire de BGW de variance finie.

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique $(\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1)$ et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$ arbre de BGW conditionné à avoir $n$ sommets

**Théorème** (Curien & K. '13)**.**

Soit $\alpha \in (1, 2)$. On suppose que $\mu_i \sim C/i^{1+\alpha}$ quand $i \to \infty$.

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$ arbre de BGW conditionné à avoir $n$ sommets

**Théorème** (Curien & K. '13)**.**

Soit $\alpha \in (1, 2)$. On suppose que $\mu_i \sim C/i^{1+\alpha}$ quand $i \to \infty$. Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{L}_\alpha$ tel que

$$n^{-1/\alpha} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{L}_\alpha,$$

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$ arbre de BGW conditionné à avoir $n$ sommets

**Théorème** (Curien & K. '13)**.**

Soit $\alpha \in (1, 2)$. On suppose que $\mu_i \sim C/i^{1+\alpha}$ quand $i \to \infty$. Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{L}_\alpha$ tel que

$$n^{-1/\alpha} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \quad \mathcal{L}_\alpha,$$

appelé arbre à boucles stable d'indice $\alpha$.

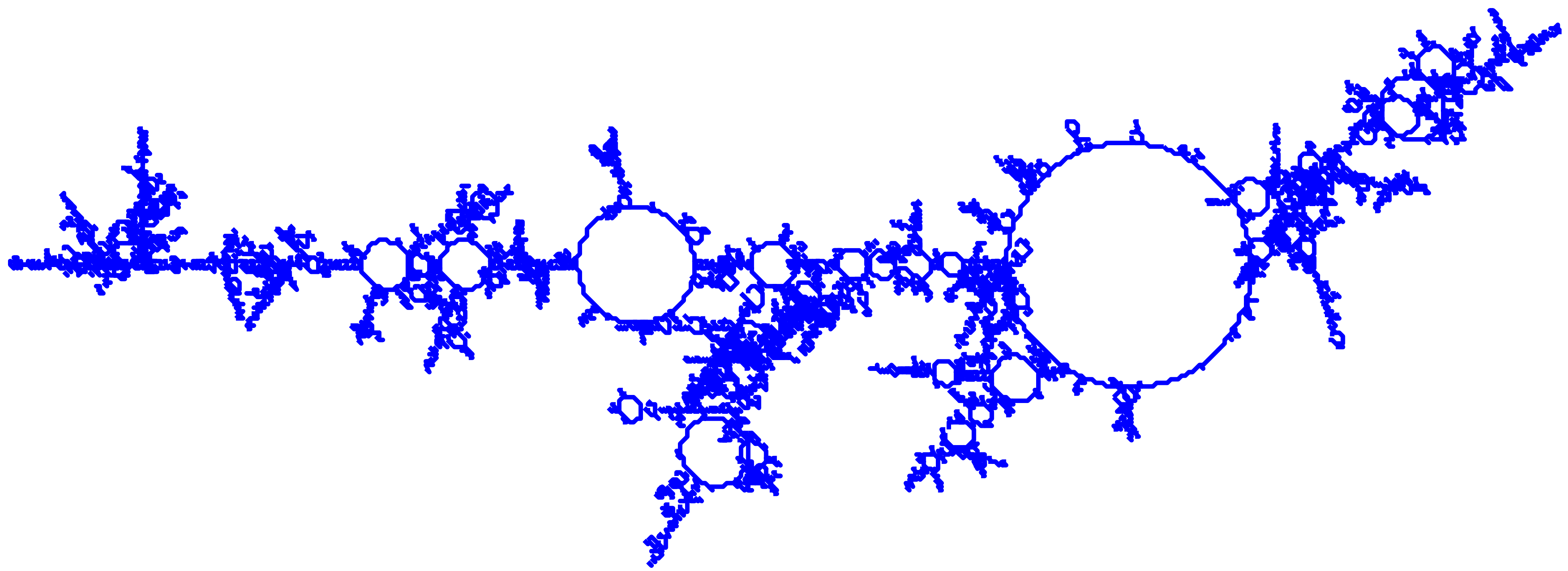


Figure: Un plongement non isométrique d'une réalisation de $\mathcal{L}_{3/2}$, l'arbre à boucles stable d'indice 3/2.

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-BGW arbre conditionné à avoir $n$ sommets

**Théorème** (Curien & K. '13).

Soit $\alpha \in (1, 2)$. On suppose que $\mu_i \sim C/i^{1+\alpha}$ quand $i \to \infty$. Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{L}_\alpha$ tel que

$$n^{-1/\alpha} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{L}_\alpha,$$

appelé arbre à boucles stable d'indice $\alpha$.

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0,1,2,...\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-BGW arbre conditionné à avoir $n$ sommets

**Théorème** (Curien & K. '13).

Soit $\alpha \in (1,2)$. On suppose que $\mu_i \sim C/i^{1+\alpha}$ quand $i \to \infty$. Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{L}_\alpha$ tel que

$$n^{-1/\alpha} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{L}_\alpha,$$

appelé arbre à boucles stable d'indice $\alpha$.

$\rightsquigarrow$ **Duquesne (2003)** : Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{T}_\alpha$ (l'arbre $\alpha$-stable introduit par Le Gall & Le Jan) tel que :

$$\frac{(c|\Gamma(1-\alpha)|)^{-1/\alpha}}{n^{1-1/\alpha}} \cdot \mathcal{T}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_\alpha,$$

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu_i = 1$) et soit $\mathcal{T}_n$ un $\mu$-BGW arbre conditionné à avoir $n$ sommets

**Théorème** (Curien & K. '13)**.**

Soit $\alpha \in (1, 2)$. On suppose que $\mu_i \sim C/i^{1+\alpha}$ quand $i \to \infty$. Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{L}_\alpha$ tel que

$$n^{-1/\alpha} \cdot \mathrm{Loop}(\mathcal{T}_n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{L}_\alpha,$$

appelé arbre à boucles stable d'indice $\alpha$. De plus, $\mathcal{L}_{3/2}$ est la limite d'échelle des bords de grandes composantes connexes de percolation critique par sites sur la triangulation aléatoire infinie uniforme (UIPT) d'Angel & Schramm.

$\leadsto$ **Duquesne (2003)** : Il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{T}_\alpha$ (l'arbre $\alpha$-stable introduit par Le Gall & Le Jan) tel que :

$$\frac{(c|\Gamma(1-\alpha)|)^{-1/\alpha}}{n^{1-1/\alpha}} \cdot \mathcal{T}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_\alpha,$$