Vieta Jumping

Igor Kortchemski

- Exercices -

Exercice 1 Soient a, b, c des nombres entiers strictement positifs tels que $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Montrer que $a^2 + b^2 - abc$ est un carré parfait.

Exercice 2 Soient a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab - 1$ divise $(4a^2 - 1)^2$, alors $a = b$.

Exercice 3 Soient a et b deux entiers strictement positifs avec $(a, b) \neq (1, 1)$ et tels que $ab - 1$ divise $a^2 + b^2$. Montrer que $a^2 + b^2 = 5ab - 5$.

Exercice 4 Soient a et b deux entiers positifs impairs tels que $2ab + 1$ divise $a^2 + b^2 + 1$. Montrer que $a = b$.

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 Par l'absurde, supposons que $a^2+b^2-abc=d$ ne soit pas un carré parfait. À c, d fixés, choisissons le couple (a, b) vérifiant $a^2+b^2-abc=d$ et minimisant la somme $a+b$. Par symétrie, supposons $a \geq b$. L'équation du second degré

$$X^2 - Xbc + b^2 - d = 0$$

admet pour racine $x_1 = a$. D'après les formules de Viète, la seconde racine x_2 vérifie

$$x_2 = \frac{b^2-d}{a}, \qquad x_2 + a_1 = bc.$$

La seconde égalité montre que x_2 est entier. D'autre part,

$$0 = x_2^2 + b^2 - x_2bc - d > x_2^2 + b^2 - x_2bc - c$$

car $d < c$, ce qui force $x_2 > 0$. Par ailleurs, le fait que $x_2 = \frac{b^2-d}{a}$ impose $x_2 < \frac{b^2}{a} \leq b$, ce qui aboutit à une contradiction.

Solution de l'exercice 2 Pour se ramener à une équation du second degré, on remarque que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $4ab-1$ divise $b^2(4a^2-1)^2-(4ab-1)(4a^3b-2ab+a^2)=(a-b)^2$. On est alors en mesure d'utiliser la technique du Vieta Jumping : on pose $k=(a-b)^2/(4ab-1)$, on considère le couple (A, B) tel que $k = (A-B)^2/(4AB-1)$ et qui minimise la somme $A+B$, on suppose par symétrique que $A > B$, et on montre que la deuxième racine C de l'équation du second degré $x^2-(2B+4kB)x+B^2+k=0$ vérifie $C > 0$ et $C+B < A+B$.

Solution de l'exercice 3 Supposons par l'absurde que $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = k$ avec $k \neq 5$. Parmi tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $a \geq b$ et $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = k$, choisissons-en un minimisant la somme $a+b$, et notons le (a_1, b_1). On voit aisément que $a_1 \neq b_1$; en particulier $a_1 \geq b_1+1$.

Traitons déjà le cas $b_1 = 1$: alors $a-1$ divise a^2+1, et donc $a-1$ divise $a^2+1-(a+1)(a-1)=2$. Donc $a=2$ ou $a=3$, ce qui donne $k=5$ dans tous les cas, absurde. Ainsi, $b_1 \geq 2$.

Considérons le polynôme $P(x) = x^2 - x(kb_1) + b_1^2 + k = 0$. Par définition, $P(a_1)=0$. Notons a_2 la seconde racine réelle de P.

Étape 1 : a_2 est entier. En effet, d'après les formules de Viète, $a_2 = kb_1 - a_1$.

Étape 2 : a_2 est strictement positif. En effet, d'après les formules de Viète, $a_2 = \frac{b_1^2+k}{a_1}$, ce qui prouve que $a_2 > 0$.

Étape 3 : $a_2 < a_1$. En effet, d'après les formules de Viète, $a_2 = \frac{b_1^2+k}{a_1}$. Or

$$a_2 < a_1 \iff b_1^2 + k < a_1^2 \iff \frac{a_1^2+b_1^2}{a_1b_1-1} < (a_1-b_1)(a_1+b_1) \iff a_1(b_1a_1^2 - 2a_1 - b_1^3) > 0.$$

Or le polynôme $Q(x) = b_1x^2 - 2x - b_1^3$ atteint son minimum en $x = 1/b_1$. On en déduit que $Q(a_1) \geq Q(b_1+1) = 2b_1^2 - b_1 - 2$, qui est strictement positif car $b_1 \geq 2$.

On a donc également $\frac{a_2^2+b_1^2}{a_2b_1-1} = k$ avec $a_2+b_1 < a_1+b_1$, absurde.

Solution de l'exercice 4 Supposons par l'absurde que $a \neq b$, et écrivons $k = \frac{a^2+b^2+1}{2ab+1}$. Clairement $k \neq 1$ car $a \neq b$. Parmi tous les couples (a, b) d'entiers impairs strictement positifs tels que $a \geq b$ et $k = \frac{a^2+b^2+1}{2ab+1}$, choisissons-en un minimisant la somme $a+b$, et notons le (a_1, b_1). Comme $k \neq 1$, on a $a_1 \neq b_1$.

Considérons le polynôme $P(x) = x^2 - 2b_1kx + b_1^2 - k + 1 = 0$. Par définition, $P(a_1) = 0$. Notons a_2 la seconde racine réelle de P.

Étape 1 : a_2 est un entier. En effet, d'après les formules de Viète, $a_2 = 2b_1k - a_1$.

Étape 2 : a_2 est impair et strictement positif. Le fait que a_2 soit impair découle de l'égalité $a_2 = 2b_1k - a_1$. Comme $a_2^2 + b_1^2 + 1 = k(2a_1a_2+1)$, si $a_2 \leq -1$, on aurait $a_2^2 + b_1^2 + 1 \leq k(1-2a_1) < 0$, absurde.

Étape 3 : $a_2 < a_1$. En effet, d'après les formules de Viète, $a_2 = \frac{b_1^2 - k + 1}{a_1}$. Ainsi,

$$a_2 < a_1 \Longleftrightarrow b_1^2 - k + 1 < a_1^2 \Longleftrightarrow b_1^2 - a_1^2 + 1 < \frac{a_1^2 + b_1^2 + 1}{2a_1 b_1 + 1} \Longleftrightarrow 2a_1(a_1 - b_1)(a_1 + a_1 b_1 + b_1^2) > 0,$$

ce qui est le cas.

On a donc également $k = \frac{a_2^2 + b_1^2 + 1}{2a_2 b_1 + 1}$ avec $a_2 + b_1 < a_1 + b_1$, absurde.