Olympiade française de mathématiques

Stage olympique de printemps
ACHÈRES

Stage olympique de printemps
Achères, avril 2005

S.O.F.T.

Avant-propos

Le stage d'Achères 2005 a été organisé par l'Olympiade française de mathématiques, avec le soutien de France Télécom.

Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques au Mexique en juillet 2005.

Nous tenons à remercier France Télécom pour son soutien décisif au stage ; nous remercions aussi le centre J.A.L. Mutatis pour son excellent accueil et l'École normale supérieure pour son soutien logistique.

Olympiade française de mathématiques
(OFM)

Table des matières

Hautes résolutions (HR)

Première partie

Arithmétique

Chapitre 1

Petits et grands commentaires diophantiens (PGCD)

1.1 Les réflexes

Résoudre dans $\mathbb{R}$. Principalement, si l'équation est de degré 2 en une certaine variable, il peut être possible de commencer par résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$, puis se sélectionner parmi les solutions celles qui sont entières. Dans le cas d'une équation de degré 2, on est alors amené à déterminer quand le discriminant calculé est un carré.

Utilisation d'inégalités. Lorsque peu d'inconnues interviennent (en général, deux est un maximum), il est souvent utile d'écrire des inégalités les reliant.

Rappelez-vous qu'entre deux entiers, il y a toujours un écart de 1. Ainsi à elle seule, la double inégalité $x < y < x+1$ entraîne une contradiction.

Exemple. $x^2 = y^4 + 2$; $x^2 - xy + y^2 = 727$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Factoriser une partie de l'équation. Pour utiliser des propriétés de divisibilité, il peut parfois être utile d'écrire l'équation sous la forme $AB = CD$ où A, B, C et D sont des facteurs que l'on a pu isoler.

Rappelez-vous par exemple que si $ab = x^2$ avec a et b premier entre eux, alors a et b sont tous les deux des carrés. De même si $ab = 2^n$ alors a et b sont des puissances de 2. (On peut remplacer 2 par n'importe quel nombre premier p.)

Exemple. $2^n + 1 = x^2$

Reproduction des solutions. Bien que cela ne permette pas véritablement de résoudre l'exercice, il peut toujours être intéressant de savoir s'il est possible étant donné une solution d'en construire une autre.

Notez que cela est très relié au principe de descente infinie... Notez également que ces manipulations sont *toujours* possibles lorsqu'une variable intervient avec un degré au plus 2.

Exemple. $x^3 + y^5 = z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65$

Descente infinie. Si à partir d'une solution, on sait construire une solution « plus petite », on peut énormément limiter l'ensemble des solutions.

Exemple. $x^3 + 9y^3 = 3z^3$; $x^4 + y^4 = z^2$

Utilisation des congruences. Si on arrive à prouver que modulo N, une équation n'a pas de solutions, alors elle n'en aura pas non plus en nombres entiers. L'intérêt de cette méthode est que modulo N, il n'y a qu'un nombre fini de cas à tester.

Le plus dur est de trouver un entier N convenable... pour cela, on peut retenir les heuristiques suivantes :

- s'il y a des carrés, essayez $N = 4$, voire $N = 8$;
- plus généralement, s'il y a des puissances p-ième, essayez $N = p^2$, $N = p^3$, *etc* ;
- lorsqu'il intervient une puissance n-ième (avec n un entier connu), il peut être utile de choisir pour N un nombre premier congru à 1 modulo n ;
- lorsqu'il intervient une puissance n-ième (où n est l'inconnue), disons a^n, il peut être utile de choisir pour N un diviseur pas trop grand de $a^k - 1$ pour un certain entier k.

1.2 Quelques équations diophantiennes

$\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$**.** Les solutions sont $x = 2tmn$, $y = t(m^2 - n^2)$, $z = t(m^2 + n^2)$ (à permutation près de x et y) où m et n sont premiers entre eux et de parité contraire.

Équation de Pell-Fermat. C'est l'équation $|x^2 - dy^2| = 1$ où d est un entier sans facteur carré. Elle admet toujours des solutions, et si l'on note (x_0, y_0) la plus petit d'entre elles (*i.e.* par exemple celle pour laquelle $|x_0|$ est le plus petit), alors les autres solutions sont les (x_n, y_n) où $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$.

Notez qu'il existe une méthode générale pour calculer la plus petite solution (appelée *solution fondamentale*) : elle repose sur le développement en fractions continues de $\sqrt{d}$.

Chapitre 2

Recherches arithmétiques du soir (RAS)

2.1 Énoncés

Exercice 1.

Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets (x, y, z, t) d'entiers strictement positifs premiers entre eux dans leur ensemble (i.e. sans facteur commun) et tels que :

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4$$

Exercice 2.

On considère deux réels a et b vérifiant :

$$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6)$$

Montrer qu'ils ne sont pas simultanément rationnels.

Exercice 3.

Déterminer le nombre de quadruplets (x, y, z, t) d'entiers parmi $\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$ tels que :

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + t^3 \pmod{37}$$

2.2 Corrigés

Corrigé 1.

On cherche z sous la forme d'un carré u^2. L'équation devient :

$$x^3 + y^3 = t^4 - u^4$$

Si l'on fait alors le changement de variables $t = a + b$, $u = a - b$, il vient alors :

$$x^3 + y^3 = (a + b)^4 - (a - b)^4 = 8a^3b + 8ab^3$$

Mais lorsque a et b sont pris comme des cubes, $a = r^3$, $b = s^3$, on voit que $8a^3b = (2r^3s)^3$ est un cube, et de même pour $8ab^3$. Ainsi, pour tous (r, s) entiers avec $r > s > 0$, le quadruplet :

$$\left(2r^3s, 2rs^3, (r^3 - s^3)^2, r^3 + s^3\right)$$

est solution de l'équation initiale. On veut de plus que les quatre entiers obtenus soient sans facteur commun. Pour cela, on remarque que si l'on choisit $s = 1$ et r pair, le quadruplet devient :

$$\left(2r^3, 2r, (r^3 - 1)^2, r^3 + 1\right)$$

et $2r$ est déjà premier à $r^3 + 1$. On obtient bien, ainsi, une famille infinie de solutions primitives.

Corrigé 2.

En développant, la relation entre a et b s'écrit :

$$a^4b^4 - 2a^6 - 2b^6 + 4a^2b^2 = 0$$

ce qui se factorise en :

$$(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2) = 0$$

de sorte que l'on a ou bien $a^2/b = \pm\sqrt{2}$, ou bien $b^2/a = \pm\sqrt{2}$, ce qui contredit dans tous les cas le fait que a et b soient tous les deux rationnels.

Corrigé 3.

On va raisonner en fixant le couple (z, t), et en comptant le nombre de couples (x, y) qui conviennent. Soit $k = z^3 + t^3$.

Si $k \equiv 0 \pmod{37}$, on doit dénombrer les couples (x, y) modulo 37 tels que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{37}$. On écrit :

$$x^2 \equiv -y^2 \equiv 36y^2 = (6y)^2 \pmod{37}$$

de sorte que 37 divise $(x - 6y)(x + 6y)$, donc divise l'un des deux facteurs, d'où $x \equiv \pm 6y \pmod{37}$. Or $6y$ et $-6y$ sont distincts modulo 37 si et seulement si $y \neq 0$, donc on trouve en tout $1 + 2 \times 36 = 73$ solutions.

Si à l'inverse $k \not\equiv 0 \pmod{37}$, on est conduit à résoudre :

$$(x - 6y)(x + 6y) \equiv k \pmod{37} \tag{2.1}$$

On pose alors $a = x - 6y$, $b = x + 6y$. Notons qu'alors, $2x \equiv a + b \pmod{37}$, et donc $x \equiv 19 \cdot (2x) \equiv 19(a+b) \pmod{37}$. De la même manière, $y \equiv -3 \cdot 12y \equiv -3(b-a) \pmod{37}$. Ainsi, le nombre de couples (x,y) modulo 37 vérifiant (2.1) est exactement le nombre de couple (a,b) modulo 37 vérifiant $ab \equiv k \pmod{37}$. Cela impose a et b non nuls modulo 37, et réciproquement, pour chaque a donné non divisible par 37, il existe un entier b, unique modulo 37, tel que $ab \equiv k \pmod{37}$.[1] Donc il y a exactement 36 couples (x,y) solutions.

Reste à déterminer le nombre de couples (z,t) tels que $k = z^3 + t^3 \equiv 0 \pmod{37}$. Si $t = 0$, la seule solution est $z = t = 0$. Sinon, on peut écrire $z \equiv tu \pmod{37}$ pour un certain u unique modulo 37, et l'équation devient :

$$u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1) \equiv 0 \pmod{37}$$

Il vient donc $u \equiv -1 \pmod{37}$ ou bien :

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \equiv -\frac{3}{4} \pmod{37}$$

soit encore :

$$(u - 19)^2 \equiv 27 \equiv 8^2 \pmod{37}$$

(On obtient cette dernière congruence en calculant la table des carrés). Il y a donc en tout trois solutions distinctes à l'équation $u^3 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$, soit -1, 11 et 27. Il en résulte que pour chaque $t \neq 0$, l'équation $z^3 + t^3 \equiv 0 \pmod{37}$ admet trois solutions. Il y a donc en tout $36 \times 3 + 1 = 109$ couples (z,t) pour lesquels $k \equiv 0 \pmod{37}$.

Finalement, on obtient $109 \times 73 + (37^2 - 109) \times 36 = 53\,317$ quadruplets (x,y,z,t) solutions.

---

[1] L'existence est une conséquence du théorème de Bézout. En effet, comme a est premier à 37, il existe b et m entiers tels que $ab + 37m = k$. L'unicité résulte de ce que, si $ab \equiv ab' \pmod{37}$, alors 37 divise $a(b - b')$ et pas a, donc $b - b'$.

Chapitre 3

Pratique personnelle du calcul matinal (PPCM)

3.1 Énoncés

Exercice 1.

Pour quels nombres premiers p, existe-t-il des entiers strictement positifs n, x et y tels que $p^n = x^3 + y^3$?

Exercice 2.

Trouver tous les entiers strictement positifs a, b, c, x, y et z tels que :

$$\begin{aligned} a + b + c &= xyz \\ x + y + z &= abc \end{aligned}$$

Exercice 3.

Montrer que l'équation :

$$x^2y^2 = z^2(z^2 - x^2 - y^2)$$

n'a pas de solutions en entiers strictement positifs.

3.2 Corrigés

Corrigé 1.

On a la factorisation $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, et donc $x + y$ et $x^2 - xy + y^2$ doivent être des puissances de p. On a clairement $x + y > 1$, donc $x + y$ est multiple de p. De même, $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy \geqslant xy$, et si $p > 2$, on a $xy > 1$. On en déduit que $x^2 - xy + y^2$ est aussi multiple de p.

Donc p divise $(x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$. Si l'on suppose $p > 3$, il vient que p divise xy, donc p divise x ou y. Par ailleurs, il divise $x + y$, donc il divise à la fois x et y. On pose $x = px'$, $y = py'$, et l'on a :

$$p^{n-3} = x'^3 + y'^3$$

ce qui fournit une solution strictement plus petite. Le principe de descente infinie assure alors qu'il n'y a pas de solution pour $p > 3$.

Pour $p = 2$, on remarque que $(x, y, n) = (1, 1, 1)$ est solution, et pour $p = 3$, $(x, y, n) = (1, 2, 2)$ est solution.

Corrigé 2.

On utilise des raisonnements d'inégalité. On remarque que les inconnues a, b, c d'une part et x, y, z d'autre part jouent des rôles symétriques, donc on peut supposer $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$ et $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$. Nous allons montrer que l'un des produits bc ou xy est inférieur à 2.

Supposons par exemple $bc \geqslant 3$. Alors $abc \geqslant 3a \geqslant a+b+c$, et cette inégalité est stricte : c'est clair si $bc > 3$, et si $bc = 3$, on conclut en remarquant que nécessairement $b = 3$ et $c = 1$. Ainsi :

$$3x \geqslant x + y + z = abc > a + b + c = xyz$$

d'où $yz < 3$, ce qui conclut la majoration annoncée.

Quitte à échanger les triplets (a, b, c) et (x, y, z) qui jouent des rôles symétriques, on peut supposer $yz = 1$ ou 2. Si $yz = 1$, alors $y = z = 1$, et le système devient :

$$\begin{aligned} a + b + c &= x \\ abc &= x + 2 \end{aligned}$$

On en déduit que $abc = a + b + c + 2$. Si $c \geqslant 2$, alors $bc \geqslant 4$ et donc $4a \leqslant abc = a + b + c + 2 \leqslant 4a$. Toutes les inégalités sont donc des égalités, et ainsi $a = b = c = 2$. On obtient la solution $(2, 2, 2, 6, 1, 1)$. Si maintenant $c = 1$, on obtient $ab = a + b + 3$, c'est-à-dire $(a - 1)(b - 1) = 4$. On en déduit les solutions $(3, 3, 1, 7, 1, 1)$ et $(5, 2, 1, 8, 1, 1)$ selon que $a - 1 = 2$ ou 4.

Si $yz = 2$, alors $y = 2$ et $z = 1$, et le système devient :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2x \\ abc &= x + 3 \end{aligned}$$

On en déduit que $2abc = a+b+c+6$. Si $c \geqslant 2$, il vient $8a \leqslant 2abc = a+b+c+6 \leqslant 3a+6$, d'où $a \geqslant 6/5 < c$, ce qui est impossible. Donc $c = 1$, et l'on a $2ab = a + b + 7$, d'où

$a = (b+7)/(2b-1)$. La fonction :

$$x \mapsto \frac{x+7}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{13/2}{2x-1}$$

est décroissante et tend vers $1/2$ en $+\infty$. On a $f(1) = 8$, $f(2) = 4$, et $f(x) < x$ pour $x \geqslant 3$. On en déduit les solutions $(3, 2, 1, 3, 2, 1)$ et $(8, 1, 1, 5, 2, 1)$.

Les solutions au problème s'obtiennent à partir des solutions précédentes en effectuant les permutations licites.

Corrigé 3.

Posons $Z = z^2$. On obtient l'équation suivante, de degré 2 en Z :

$$Z^2 - (x^2 + y^2)Z - x^2y^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $x^4 + 6x^2y^2 + y^4$. Si l'équation a une solution, ce nombre doit être un carré. Or :

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2$$

Posons $a = x^2 + y^2$ et $b = 2xy$. Alors $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2 = (x^2 - y^2)^2$ sont des carrés parfaits, donc leur produit $a^4 - b^4$ l'est aussi. Mais il est connu que l'équation diophantienne :

$$a^4 - b^4 = c^2$$

n'a pas de solutions en entiers strictement positifs. Comme a et b sont strictement positifs, on a nécessairement $c = 0$, d'où $a = b$. Dans ce cas, $x = y$ et le discriminant devient $8x^4$, qui n'est pas un carré, ce qui conclut.

Deuxième partie

Géométrie

Chapitre 1

Observations pour novices en géométrie (ONG)

1.1 Rappels de bon sens

Faire une bonne figure. Elle doit être suffisamment précise pour que les propriétés utiles soient apparententes ; ne pas hésiter à faire une figure principale de bonne taille (au moins une demi-page A4) et éventuellement quelques figures auxiliaires montrant des éléments particuliers de la figure principale. L'idée est de pouvoir découvrir certaines propriétés remarquables sur la figure (égalité d'angles ou de distances, points cocyliques ou alignés, triangles semblables).

Voir comment les points sont agencés. Ne pas rester prisonnier de la façon dont l'énoncé construit le problème, mais envisager d'autres façons d'enchaîner les propriétés. En supposant la conclusion établie, étudier si certaines propriétés s'en déduisent et tenter une preuve directe de ces propriétés.

Pour démontrer une équivalence. Bien choisir la première implication à établir. En principe, c'est celle pour laquelle les hypothèses sont les plus riches. Par exemple, dans l'exercice 5 des olympiades internationales 2004, il est plus facile de supposer qu'un quadrilatère est inscriptible plutôt que d'avoir à le démontrer. Souvent, la réciproque se déduit du sens direct (voir preuves des théorèmes de Ceva et Menelaüs).

Ne pas se bloquer sur une méthode. Il faut diversifier les tentatives. Les solutions de géométrie pure sont les plus élégantes, mais aussi parfois les plus difficiles (c'est comme la peinture à l'huile). Une approche efficace est souvent de combiner des remarques de géométrie pure avec des calculs trigonométriques. De ce point de vue, la formule des sinus apparaît comme l'outil efficace par excellence. Il va de soi que toutes les formules classiques du triangle, comme exposés dans le cours de Pierre Dehornoy doivent être connues. À cela s'ajoutent la relation de Ptolémée et les propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle. On doit mentionner aussi les méthodes par transformations géométriques. Par exemple, l'homothétie est un outil simple à partir duquel les propriétés du cercle d'Euler sont faciles à établir ; d'autre part, la similitude est un outil qui élargit la technique classique des triangles semblables : quelques exercices sur ce thème ont été donnés. Quant aux méthodes de géométrie analytique, sans les rejeter trop vivement, il faut dire qu'elles sont rarement intéressantes dans les exercices donnés aux olympiades : le jury évite soigneusement de choisir des exercices qui s'y prêtent !

1.2 Quelques idées simples

Condition angulaire de cocyclicité. On sait que quatre points distincts A, B, C, D du plan sont cocycliques si et seulement si $(CA, CB) = (DA, DB)$ (égalité d'angles orientés de droites, mesurés modulo π). Cela donne aussi des conditions du type $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ ou $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \pi$ selon que $ACDB$ est un quadrilatère convexe ou non.

Théorème de Simson. M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si les projetés orthogonaux de M sur les côtés sont alignés. On a remarqué de plus que dans ces conditions les symétriques de M par rapport aux côtés étaient alignés avec l'orthocentre de ABC.

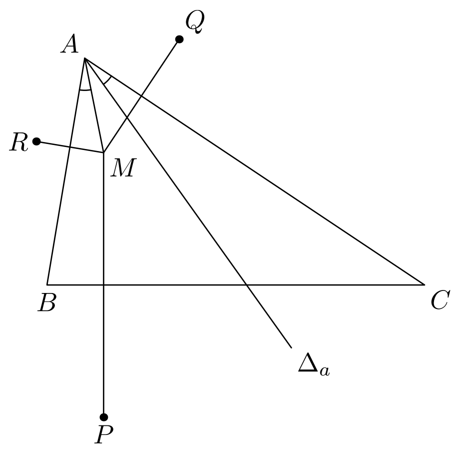
Deux applications faciles. Soit Δ_i, $1 \leq i \leq 4$ quatre droites en position générale (deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles, trois quelconques ne sont pas concourantes). Alors les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles définis par les quatre droites, se coupent ; les quatre orthocentres des quatre triangles sont alignés sur une droite contenant aussi les quatre symétriques de S par rapport aux Δ_i.

1.3 Complément sur les points isogonaux.

Soit Δ, Δ', D et D' quatre droites concourantes. On dit que Δ et Δ' sont *isogonales* par rapport à (D, D') si (Δ, Δ') et (D, D') ont mêmes bissectrices.

Soit alors ABC un triangle et M un point distinct de A, B, C. On note Δ_a l'isogonale de (AM) par rapport à (AB, AC) et l'on définit Δ_b et Δ_c de façon analogue. Alors Δ_a, Δ_b, Δ_c sont concourantes ou parallèles. Dans le cas de concourance, le point d'intersection est appelé *conjugué isogonal* de M par rapport au triangle ABC. À titre d'exemple, on peut observer que l'orthocentre est conjugué isogonal du centre du cercle circonscrit.

Comment montrer ce résultat ? La méthode classique (simple et efficace) consiste à appliquer le théorème de Ceva, la forme trigonométrique étant pertinente. Une méthode inédite (?) est la suivante.



Soit P, Q, R les symétriques de M par rapport à (BC), (CA) et (AB) respectivement. Il est aisé de voir que Δ_a est bissectrice de $\widehat{RAQ}$, puis médiatrice de $[RQ]$. On en déduit que Δ_a, Δ_b et Δ_c sont les médiatrices de PQR et se coupent (si c'est un vrai triangle) au centre M' de son cercle circonscrit.

À titre d'exercice final, le lecteur montrera que les projetés de M et M' sur les côtés de ABC sont cocycliques sur un cercle centré au milieu de $[MM']$ (considérer l'homothétie de centre M et de rapport $1/2$). Si $[MM'] = [OH]$, on retrouve le cercle d'Euler.

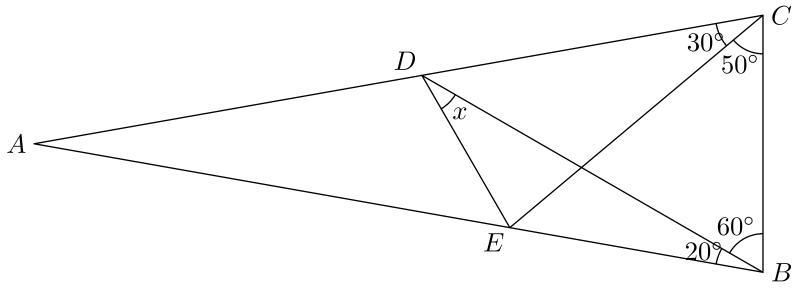
Chapitre 2

Travail de géométrie vespéral (TGV)

2.1 Énoncés

Exercice 1.

On donne la figure suivante. Calculer l'angle x.



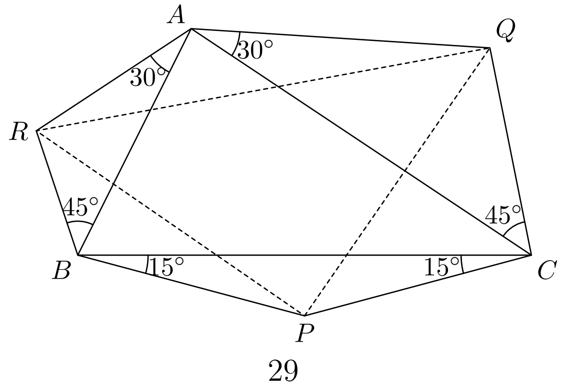
Exercice 2.

Soit ABC un triangle. On note a, b, c les longueurs des côtés, O le centre du cercle circonscrit, R son rayon, et H l'orthocentre. Montrer que :

$$OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

Exercice 3.

Considérons la figure suivante. Montrer que le triangle PQR est isocèle rectangle en P.



Exercice 4.

Soit ABC un triangle acutangle. On note D le point intérieur à ABC vérifiant :

$$\widehat{BDA} = \widehat{BCA} + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$$

Calculer le rapport $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

2.2 Corrigés

Corrigé 1.

On commence par remarquer que le triangle BCE est isocèle en B. On aimerait obtenir d'autres configurations particulières.

Une méthode élégante passe par l'introduction de points auxiliaires naturelsă : le point F de $[AB]$ tel que $\widehat{BCF} = 60°$, et l'intersection G de (BF) et (BD). Alors les angles en B et C du triangle BCG font $60°$, si bien que BCG est équilatéral. En particulier, $BE = BC = BG$ et donc BEG est isocèle en B.

De nouveaux angles se calculent alors facilement : on a $\widehat{EGB} = (180° - 20°)/2 = 80°$, et donc $\widehat{EGF} = 180° - 8O° - 60° = 40°$. Or $\widehat{GEF} = \widehat{CFB}$ et comme les deux autres angles du triangle CFB sont connus, égaux à $60°$ et $80°$, de sorte que $\widehat{GEF} = 40° = \widehat{EGF}$. Par conséquent, EFG est isocèle en E.

Mais par ailleurs GFD est équilatéral, car tous ses angles valent $60°$. Donc (ED) est la médiatrice de $[FG]$, qui est aussi la bissectrice de $\widehat{GDF}$. Finalement :

$$x = \widehat{GDE} = \frac{\widehat{GDF}}{2} = 30°$$

Corrigé 2.

On utilise la relation bien connue :

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

En élevant cette relation au carré scalaire, il vient :

$$OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})$$

Or on a :

$$2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB^2 + OC^2 - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 = OB^2 + OC^2 - BC^2$$

et de même en permutant les lettres, donc :

$$OH^2 = 3R^2 + (2R^2 - a^2) + (2R^2 - b^2) + (2R^2 - c^2) = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

Corrigé 3.

On voudrait montrer que R est l'image de Q par un quart de tour (direct, dans l'orientation de la figure) de centre P. Pour cela, on considère la similitude s_1 de centre C qui envoie Q sur A et la similitude s_2 de centre B qui envoie A sur R. Elle sont toutes les deux d'angle $+45°$, donc la composée $r = s_2 \circ s_1$ est une similitude d'angle $+90°$ qui envoie Q sur R. De plus, sont rapport vaut :

$$\frac{CA}{CQ} \cdot \frac{BR}{BA} = 1$$

puisque les triangles ABR et ACQ sont (inversement) semblables. Donc r est un quart de tour direct. Il reste à voir que P est le centre de la rotation r. Pour cela, on détermine $P_1 = s_1(P)$. En calculant les angles, on constate que BCP_1 est un triangle équilatéral (car les angles de CPP_1 sont les mêmes que ceux de CQA), et que $s_2(P_1) = P$.

Corrigé 4.

Comme le suggère l'hypothèse, on introduit le point E tel que le triangle ADE soit directement semblable à ACB, de sorte que $\widehat{EDB} = \pi/2$, et que :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DE}$$

Ainsi $DB = DE$, et le triangle BDE est isocèle rectangle en D. On écrit alors, compte tenu des triangles semblables :

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{BD} = \sqrt{2}$$

Chapitre 3

Séance de travail autonome sur les triangles (STAT)

3.1 Énoncés

Exercice 1.

Soit OAB un triangle isocèle en O, et C un point du cercle circonscrit à OAB distinct de A et B. La droite (AC) recoupe le cercle de centre O passant par A et B en un point D. Montrer que le triangle DCB est isocèle.

Exercice 2.

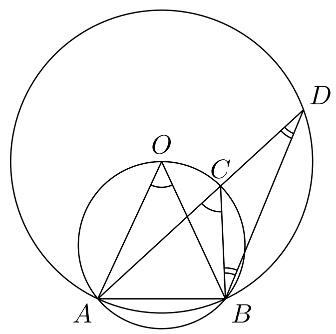
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. On suppose que (AB) et (CD) se coupent en E et que (AD) et (BC) se coupent en F. La bissectrice de $\widehat{AFB}$ coupe les segments $[AB]$ et $[CD]$ aux points P et R, et celle de $\widehat{BEC}$ coupe les segments $[BC]$ et $[AD]$ en Q et S. Montrer que $PQRS$ est un losange.

Exercice 3.

Soit $ABCD$ un parallélogramme qui n'est pas un losange. Le point E est le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de B. La perpendiculaire à (BD) issue de E intersecte (BC) en F et (AB) en G. Montrer que $EF = EG$ si et seulement si $ABCD$ est un rectangle.

3.2 Corrigés

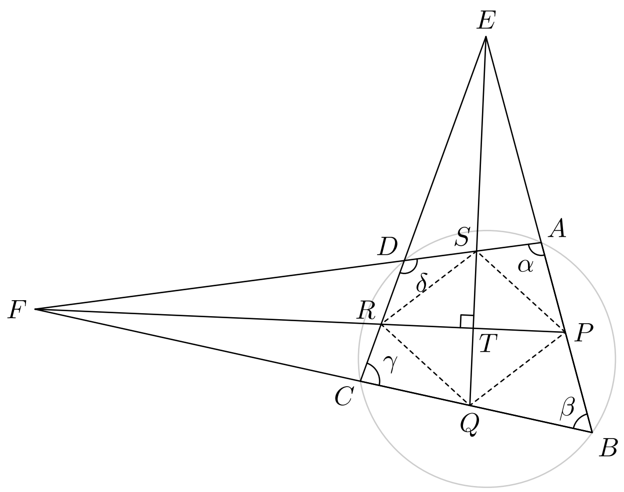
Corrigé 1.



Comme O, A, B, C sont cocycliques, on sait que $(CA, CB) = (OA, OB)$. Par ailleurs O est le centre du cercle cirsoncrit à A, B, D. Donc $2(DA, DB) = (OA, OB)$, donc $(CD, CB) = 2(DC, DB)$.

Finalement, $(CB, CD) = \pi - 2(DC, DB)$, et CBD est isocèle.

Corrigé 2.



Quitte à échanger les noms des sommets, on peut supposer A entre B et E, et C entre B et F. Soit T l'intersection des deux bissectrices, qui sont les diagonales de $PQRS$. On note α, β, γ, δ les angles en A, B, C, D.

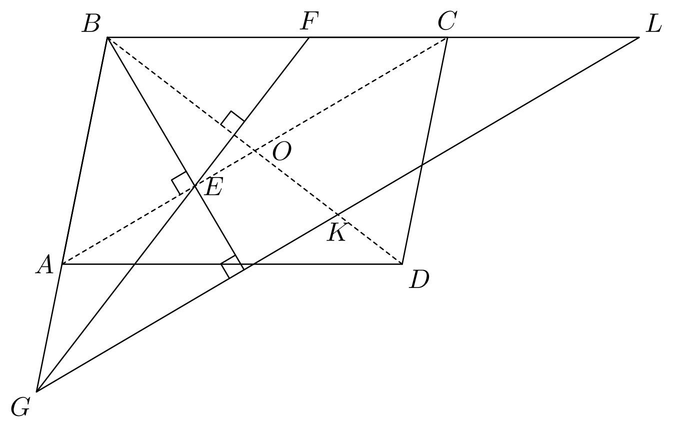
Montrons d'abord qu'elles sont perpendiculaires. Ce sont des égalités d'angles :

$$\begin{aligned}
\widehat{FTE} &= \pi - \widehat{FTQ} = \widehat{TFQ} + \widehat{FQT} \\
&= \frac{1}{2}\widehat{AFB} + (\widehat{QBE} + \widehat{QEB}) && \text{en décomposant FQT} \\
&= \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) + \beta + \frac{1}{2}(\pi - \beta - \gamma) \\
&= \pi - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{\pi}{2} && \text{car } ABCD \text{ est inscrit}
\end{aligned}$$

Ensuite, il faut voir que c'est un losange. Mais comme la bissectrice de EPR est perpendiculaire à $[PR]$, c'est que EPR est isocèle en E. Et le pied de la hauteur T est le milieu de $[PR]$. De même, T est le milieu de $[QS]$.

$PQRS$ est donc un parallélogramme, ses diagonales sont orthogonales, donc c'est un losange.

Corrigé 3.



Supposons que $ABCD$ soit un rectangle, et soit H l'intersection de (BD) et (FG). Alors (BE) et (BH) sont les hauteurs des triangles rectangles ABC et FBG.

On a alors les égalités $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$, $\widehat{BGF} = \widehat{HBF}$ et $\widehat{HBC} = \widehat{DBC} = \widehat{ACB}$ car $ABCD$ est un rectangle. Ainsi $\widehat{GBE} = \widehat{GBF}$, ce qui prouve que $BE = GE$, et que E est le centre du cercle circonscrit à BGE (qui est rectangle, donc le centre est sur $[FG]$). On obtient donc bien $EF = EG$.

Supposons réciproquement que $EF = EG$. On appelle O le centre de $ABCD$. Soit L le point d'intersection de (BC) et de la parallèle à (AC) passant par G. Les triangles BAC et BGL sont semblables, et le milieu de $[GL]$ est sur $[BO]$. Soit K ce point. C'est le milieu de $[GL]$, et E celui de $[GF]$, donc (EK) est parallèle à (AD).

Par hypothèse, (BE) est perpendiculaire à (EO), donc à (GK). En outre, $(GE) = (GH)$ est perpendiculaire à (BK). Par conséquent, E est l'orthocentre de BGK, et (KE) est orthogonale à (BG). Autrement dit, (AB) et (AD) sont perpendiculaires, et $ABCD$ est un rectangle.

Troisième partie

Inégalités

Chapitre 1

Principales inégalités de base (PIB)

1.1 Inégalités à connaître

Inégalité triangulaire. Si on a trois points A, B, C, $AB + BC \geqslant AC$.

Inégalité de réordonnement. Si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$, et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels positifs, la somme $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ est maximale si on range les b_k dans le même ordre que les a_k, et elle est minimale si on les range dans l'ordre inverse.

Inégalité des moyennes. Pour tous réels $a_1, a_2 \ldots a_n \geqslant 0$, on a :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Inégalité de Jensen. Soit f est une fonction convexe. Par exemple, $f'' \geqslant 0$, où $f(x) = |x|$, typiquement $f = \exp$ ou $x \mapsto x^n$ $(n > 1)$ ou encore x^{-m} $m > 0$.

Alors, pour tous $a_1, a_2, \ldots a_n$, et $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ dont la somme fait 1, on a :

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \leqslant \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n)$$

Ceci signifie qu'un barycentre de points de la courbe de f est au-dessus de la courbe.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si on a des réels positifs $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, alors :

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + \cdots b_n^2)$$

1.2 Trucs et astuces

Transformation de Ravi. Si a, b, c sont les côtés d'un triangle, on doit toujours vérifier les inégalités triangulaires. Il est pratique de poser $2p = b+c-a$, $2q = c+a-b$, $2r = a+b-c$, et p, q, r sont alors des nombres positifs sans contraintes particulières (car si p, q, r sont des réels positifs, on peut construire un triangle de côtés $p + q$, $q + r$, et $r + p$)

Homogénéité. Parfois, les problèmes sont homogènes : si on multiplie toutes les variables par un même facteur k, les hypothèses sont toujours vérifiées et l'inégalité à démontrer reste la même. Par exemple : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$

On peut alors supposer certaines choses : par exemple, une des variables vaut 1, ou alors leur somme, leur produit. Attention ! Si on suppose déjà quelque chose, les hypothèses ne sont plus homogènes : on ne peut pas supposer une deuxième condition.

Ensuite, pour revenir au cas général, il suffit de multiplier par le bon facteur.

Symétrie. Il arrive que le problème soit symétrique, c'est-à-dire que toutes les variables jouent le même rôle (exemple : $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$). On peut alors les permuter comme on veut, et par exemple supposer qu'elles sont rangées par ordre croissant.

Chapitre 2

Petites activités de recherche sur les inégalités (PARI)

2.1 Énoncés

Exercice 1.

Soit a, b, c, d, des réels positifs de somme 1. Montrer que :

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geqslant\frac{1}{2}$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2.

Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leqslant\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

Exercice 3.

Soient a, b, c, d, e, f des réels de $[0,1]$. Montrer que

$$\begin{aligned}&\frac{a^3}{b^5+c^5+d^5+e^5+f^5+5}+\frac{b^3}{c^5+d^5+e^5+f^5+a^5+5}+\frac{c^3}{d^5+e^5+f^5+a^5+b^5+5}\\&+\frac{d^3}{e^5+f^5+a^5+b^5+c^5+5}+\frac{e^3}{f^5+a^5+b^5+c^5+d^5+5}+\frac{f^3}{a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+5}\leqslant\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soient $n\geqslant 2$ réels dans l'ordre croissant $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Montrer que

$$a_1a_2^4+a_2a_3^4+\cdots+a_{n-1}a_n^4+a_na_1^4\geqslant a_2a_1^4+a_3a_2^4+\cdots+a_na_{n-1}^4+a_1a_n^4$$

2.2 Corrigés

Corrigé 1.

On écrit $\frac{a^2}{a+b} = a - \frac{ab}{a+b}$. En sommant, on trouve qu'il faut en fait montrer que :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\text{Mais } \frac{ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{4} \text{ car } (a+b)^2 \geqslant 4ab$$

En sommant, on obtient bien l'inégalité recherchée. On a égalité si et seulement si on a égalité pour chacun des termes ci-dessus, c'est-à-dire si $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Corrigé 2.

Remarquons que

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

Soit $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ et $y = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.
Il faut prouver

$$x + y \leqslant \sqrt[3]{2(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})^2} \text{ ou encore } \frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt[3]{\frac{(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})^2}{4}} \text{ ou } \left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{2}$$

qui est en fait l'inégalité de Jansen pour la fonction convexe $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$. La ligne précédente est l'inégalité entre la moyenne arithmétique (d'ordre 1), et la moyenne d'ordre $\frac{3}{2}$.

Corrigé 3.

Comme a est compris entre 0 et 1, on a :

$$\frac{a^3}{b^5 + \cdots + f^5 + 5} \leqslant \frac{a^3}{a^5 + b^5 + \cdots + f^5 + 4}$$

De même pour les autres. En sommant, on obtient alors que le membre de gauche de l'énoncé est majoré par :

$$\frac{a^3 + \cdots + f^3}{a^5 + \cdots + f^5 + 4}$$

Or par l'inégalité arithmético-géométrique, on a pour tout $t \geqslant 0$:

$$t^3 \leqslant \frac{t^5 + t^5 + t^5 + 1 + 1}{5}$$

donc en sommant ces inégalités pour $t = a, \ldots, f$, on obtient :

$$a^3 + \cdots + f^3 \leqslant \frac{3}{5}(a^5 + \cdots + f^5 + 4)$$

ce qui conclut.

Corrigé 4.

On raisonne par récurrence : c'est vrai si $n = 2$.
Supposons que ce soit vrai en $n - 1$.

$$\text{Alors } a_1 a_2^4 + \cdots + a_{n-1} a_1^4 \geqslant a_2 a_1^4 + \cdots + a_1 a_{n-1}^4$$
$$\text{On veut } a_1 a_2^4 + \cdots + a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4 \geqslant a_2 a_1^4 + \cdots + a_n a_{n-1}^4 + a_1 a_n^4$$

Si on montre

$$a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4 - an - 1 a_1^4 \geqslant a_n a_{n-1}^4 + a_1 a_n^4 - a_1 a_{n-1}^4$$

on ajoute l'hypothèse de récurrence, et c'est bon. On réécrit cette équation sous la forme :

$$(b-a)c^4 + (c-b)a^4 \geqslant (c-a)b^4 \text{ où } a = a_1, b = a_{n-1}, c = a_n$$

qui est en fait l'inégalité de Jensen (on divise par $c - a$ et et on a bien $\frac{b-a}{c-a} + \frac{c-b}{c-a} = 1$).

Chapitre 3

Opération : inégalités matinales (OIM)

3.1 Énoncés

Exercice 1.

Soient x, y, z trois réels positifs tels que $xyz = 32$.

$$\text{Montrer que : } x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 \geqslant 96$$

Exercice 2.

Soient a, b, c, x, y, z tels que $\begin{cases} a \geqslant b \geqslant c > 0 \\ x \geqslant y \geqslant z > 0 \end{cases}$.

$$\text{Montrer que } \frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geqslant \frac{3}{4}$$

Exercice 3.

Soient a_1, …, a_n des réels positifs tels que :

$$\frac{1}{a_1 + 2005} + \cdots + \frac{1}{a_n + 2005} = \frac{1}{2005}$$

$$\text{Montrer que } \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}{n-1} \geqslant 2005$$

3.2 Corrigés

Corrigé 1.

$$\begin{aligned}x^2+4y^2+4xy+2z^2 &\geqslant 4xy+4xy+2z^2\\ &\geqslant 3\sqrt[3]{4xy4xy2z^2}\\ &= 3\cdot 32(xyz)^2\\ &= 96\end{aligned}$$

Corrigé 2.

D'après l'inégalité de réordonnement, on a $by+cz \geqslant bz+cy$.

$$\text{Donc } \frac{(ax)^2}{(by+cz)(bz+cy)} \geqslant \frac{(ax)^2}{(by+cz)^2}$$

De même pour les autres. Donc :

$$\begin{aligned}&\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\\ \geqslant &\left(\frac{a^2x^2}{(by+cz)^2}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)^2}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)^2}\right)\times\frac{(1^2+1^2+1^2)}{3}\\ \geqslant &\frac{1}{3}\left(1\times\frac{ax}{by+cz}+1\times\frac{by}{cz+ax}+1\times\frac{cz}{ax+by}\right)^2 \text{ Âăpar Cauchy-Schwarz}\end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{ax}{by+cz}+\frac{by}{cz+ax}+\frac{cz}{ax+by} \geqslant \frac{by}{by+cz}+\frac{cz}{cz+ax}+\frac{ax}{ax+by}$$
$$\frac{ax}{by+cz}+\frac{by}{cz+ax}+\frac{cz}{ax+by} \geqslant \frac{cz}{by+cz}+\frac{ax}{cz+ax}+\frac{by}{ax+by}$$

par l'inégalité de réordonnement. En sommant les deux, on obtient

$$\frac{ax}{by+cz}+\frac{by}{cz+ax}+\frac{cz}{ax+by} \geqslant \frac{3}{2}$$

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Corrigé 3.

Soit $b_i=\frac{2005}{2005+a_i}$. La somme des b_i vaut alors 1. On applique l'inégalité arithmético-géométrique à $1-b_i=\sum_{i\neq j} b_j$. On obtient :

$$\begin{aligned}
1 - b_i &\leqslant (n-1) \sqrt[n-1]{\prod_{j \neq i} b_j} \\
\prod_i 1 - b_i &\leqslant (n-1)^n \prod_j b_j \qquad \text{en multipliant} \\
\prod_i \frac{1 - b_i}{b_i} &\leqslant (n-1)^n
\end{aligned}$$

On remplace b_i par sa valeur. On obtient alors

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{2005^n} \leqslant (n-1)^n$$

qui est le résultat recherché.

Quatrième partie

Relations métriques

Chapitre 1

Fiche barycentrique d'information (FBI)

1.1 Relations métriques dans le triangle

Loi des sinus. Si un angle α d'un cercle de rayon R intercepte un segment de longeur a, on a $a = 2R\sin\alpha$.

Soit ABC un triangle de côtés a, b, c opposés àux sommets A, B, C, et α, β, γ les angles en ces sommets. On note S l'aire du triangle. Alors on a la relation des sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Aire d'un triangle. Soit p le demi-périmètre du triangle, et r le rayon de son cercle inscrit. On a les formules :

$$\begin{aligned} S &= pr \text{ (découper le triangle à partir de I)} \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\gamma \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (formule de Héron)} \end{aligned}$$

Théorème de Ceva (droites concourantes). Soit trois droites issues de A, B, C coupant (BC), (CA), (AB) en P, Q, R. Alors :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1 \Leftrightarrow (AP),\ (BQ),\ (CR) \text{ sont concourantes}$$

Théorème de Ménélaüs (droite transversale). Soit P, Q, R 3 points de (BC), (CA), (AB) respectivement. Alors :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1 \Leftrightarrow P,\ Q,\ R \text{ sont alignés}$$

1.2 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R. Soit M un point quelconque et Δ une droite passant par M, qui coupe le cercle en A et B.

Soit H sur Γ tel que (MH) soit tangente au cercle. Soient X et Y deux points diamétralement oppsés. Alors :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MO^2 - R^2 = MH^2 = \overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MY}$$

(Tout ceci résulte d'ăégalités entre des produits scalaires).

1.3 Coordonnées barycentriques

Si M est un point du plan, et ABC un triangle, on dit que (x, y, z) est un système de coordonnées barycentriques de M si M est le barycentre de (A, x), (B, y), (C, z). (x, y, z) est défini à un facteur près.

On a alors $(x, y, z) = k \cdot (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Si $\mathcal{A}$ est l'aire de MBC, etc.

Points particuliers :

$$\begin{array}{ll} A = (1,0,0) & I = (a,b,c) = (\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma) \\ B = (0,1,0) & H = (\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma) \\ C = (0,0,1) & O = (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma) \\ G = (1,1,1) & \end{array}$$

1.4 Formules de trigonométrie

Formules de base.

$$\begin{array}{lll} \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a & \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin a & \cos(x+\pi) = -\cos x \\ \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a & \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos a & \sin(x+\pi) = -\sin x \\ \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan x} & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x} & \tan(x+\pi) = \tan x \end{array}$$

Formules d'addition.

$$\begin{array}{ll} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \\ \sin(a-b) = \sin a \cos - \cos a \sin b & tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{array}$$

Arc double.

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$= 1 - 2\sin^2 a \qquad = \frac{1-\sin 2a}{2}$$
$$= \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\cos a \sin a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \qquad \tan a = \frac{1-\cos 2a}{\sin 2a} = \frac{\sin 2a}{1+\cos 2a}$$

Dérivées.

$$\cos' x = -\sin x \qquad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$\sin' x = \cos x \qquad \sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Valeurs particulières.

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0 \qquad \tan 0 = 0 \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$
$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Chapitre 2

Discussions de soirée sur la trigonométrie (DST)

2.1 Énoncés

Exercice 1.

L'angle en A est le plus petit dans le triangle ABC. Les points B et C divisent le cercle circonscrit à ABC en deux arcs. Soit U un point distinct de B et C sur l'arc délimité par B et C ne contenant pas le point A. Les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ coupent la droite (AU) aux points V et W respectivement. On appelle T le point d'intersection des droites (BV) et (CW). Montrer que :

$$AU = TB + TC$$

Exercice 2.

Un cercle dont le centre est situé sur le côté $[AB]$ d'un quadrilatère convexe $ABCD$ est tangent aux trois autres côtés. Prouver que si $ABCD$ est inscriptible, alors $AD + BC = AB$.

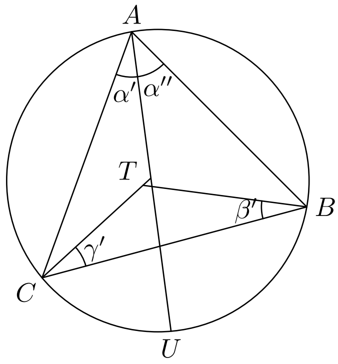
Exercice 3.

Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On note A', B' et C' les milieux respectifs des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{AB}$. La droite (BC) rencontre $(C'A')$ et $(A'B')$ respectivement en M et N, la droite (CA) rencontre $(A'B')$ et $(B'C')$ respectivement en P et Q, et la droite (AB) rencontre $(B'C')$ et $(C'A')$ respectivement en R et S.

Montrer que $MN = PQ = RS$ si et seulement si ABC est équilatéral.

2.2 Corrigés

Corrigé 1.



On note α, β, γ les angles de ABC, et α', α'', β', γ' comme sur la figure. Le triangle ACW est isocèle en W, donc $\widehat{ACT} = \alpha'$. De même, $\widehat{ABT} = \alpha''$. On obtient donc :

$$\widehat{BTC} = \pi - \beta' - \gamma' = 2\alpha$$

La loi des sinus dans le triangle BTC donne donc :

$$TB + TC = BC \cdot \left(\frac{\sin \beta'}{\sin(2\alpha)} + \frac{\sin \gamma'}{\sin(2\alpha)} \right)$$

Par ailleurs, l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est vu depuis A sous l'angle α, donc $BC = 2R \sin \alpha$ (avec R le rayon de Γ). De même, $AU = 2R \sin(\beta + \alpha')$. On en déduit qu'il suffit de prouver :

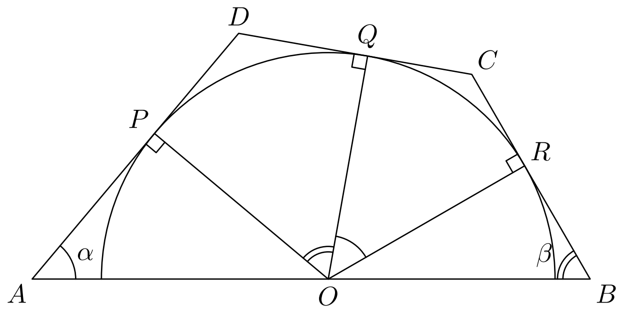
$$\sin \beta' + \sin \gamma' = 2 \cos \alpha \sin(\beta + \alpha')$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\beta' + \gamma'}{2} &= \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \\
\frac{\beta' - \gamma'}{2} &= \frac{(\beta - \alpha'') - (\gamma - \alpha')}{2} \\
&= \frac{(\beta + \alpha') - \alpha'' - (\pi - \beta - \alpha)}{2} \\
&= \frac{2\beta + \alpha' + (\alpha - \alpha'') - \pi}{2} \\
&= \beta + \alpha' - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

d'où le résultat en factorisant la somme des sinus.

Corrigé 2.



Notons α l'angle en A et β l'angle en B dans le quadrilatère $ABCD$. Appelons P, Q, R les projetés respectifs de O sur (AD), (DC) et (CB). Comme $ABCD$ est inscriptible, l'angle en C vaut $\pi - \alpha$, et donc $\widehat{QOR} = \alpha$. De même, $\widehat{POQ} = \beta$. Par ailleurs, $\widehat{AOP} = \pi/2 - \alpha$ et $\widehat{BOR} = \pi/2 - \beta$. Si r désigne le rayon du cercle, on calcule :

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{r}{\cos(\pi/2-\alpha)} + \frac{r}{\cos(\pi/2-\beta)} = \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r}{\sin\beta} \\
AD &= r\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + r\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + r\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
BC &= r\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

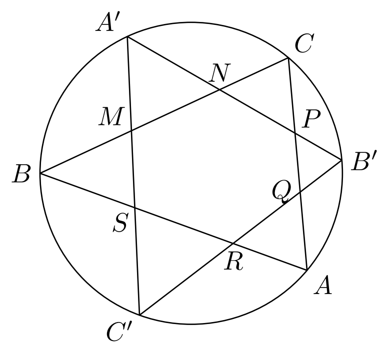
Il s'agit de montrer :

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \tan\frac{\beta}{2} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}$$

ce qui est bien clair d'après la formule :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

Corrigé 3.



Si ABC est équilatéral, on a évidemment que $MN = PQ = RS$ par symétrie. Réciproquement, si on suppose $MN = PQ = RS$, on a :

$$2\widehat{NMA'} + 2\widehat{MA'C} + 2\widehat{A'CM} = 2\pi$$

Si on note O le centre du cercle, on a :

$$2\widehat{NMA'} = \widehat{BOC'} + \widehat{COA'}$$

Soit $\widehat{NMA'} = \frac{1}{2}(\hat{C}+\hat{A})$. De même, on a $\widehat{C'SR} = \frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C})$. Par ailleurs, on a également $\widehat{A'B'C'} = \widehat{A'B'B} + \widehat{BB'A} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C}$.

Le triangle BMS est donc isocèle en B. En plus, on a les triangles semblables $C'RS$, $A'B'C'$ et NMA' ($A'B'C'$ étant à l'envers). Par symétrie, QPB' leur est aussi semblable, et finalement $C'RS$, $A'MN$, $B'PQ$ sont isométriques.

$$C'S = SB \cdot \frac{\sin \widehat{C'BS}}{\sin \widehat{SC'B}} = SB \cdot \frac{\sin \frac{\widehat{C}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$MA' = MB \cdot \frac{\sin \widehat{A'BM}}{\sin \widehat{MA'B}} = MB \cdot \frac{\sin \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\widehat{C}}{2}}$$

$$\text{D'où } \frac{C'S}{MA'} = \left(\frac{\sin \frac{\hat{C}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}}\right)^2$$

Maintenant, par similitude des triangles $A'B'C'$ et $C'RS$, $RS = A'B'\frac{C'S}{C'B'}$. De même $MN = B'C'\frac{MA'}{B'A'}$. Mais $RS = MN$. D'où

$$\begin{aligned}
&A'B'\frac{C'S}{C'B'} = B'C'\frac{MA'}{B'A'} \\
&\text{donc } \frac{C'S}{MA'} = \left(\frac{B'C'}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{B}+\hat{A}}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{C}}{2}}\right)^2 \\
&\text{donc } \left(\frac{\sin \frac{\hat{C}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{C}}{2}}\right)^2 \\
&\text{donc } \left(\sin \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}\right)^2 = \left(\sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}\right)^2 \\
&\text{donc } \hat{A} = \hat{C}
\end{aligned}$$

Par symétrie, le triangle est équilatéral.

Cinquième partie

Travail d'étude solitaire terminal (TEST)

Chapitre 1

Énoncés du T.E.S.T.

Exercice 1.

Combien y a-t-il de multiples de 11 111 formés de dix chiffres tous distincts (0 ne pouvant pas être le premier) ?

Exercice 2.

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité, R le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit. Montrer que :

$$OG \leqslant \sqrt{R(R-2r)}$$

Exercice 3.

Les nombres de 1 à 1 000 000 peuvent prendre la couleur blanche ou noire. Initialement, ils sont tous noirs. Dolphock choisit alors l'un d'entre eux, et change sa couleur, ainsi que celle de tous les nombres qui ne sont pas premiers avec lui.

Est-il possible qu'en répétant cette opération, Dolphock parvienne à colorier tous les nombres en blanc ?

Chapitre 2

Corrigés

Corrigé 1.

Notons a, b, c, d, e, f, g, h, i, j les chiffres (de gauche à droite) d'une éventuelle solution n. Par hypothèse, $(a, \ldots, j)$ est une permutation de $(0, \ldots, 9)$, et donc :

$$n \equiv a + b + \cdots + j \equiv 0 + 1 + \cdots + 9 \equiv 0 \pmod 9$$

On en déduit que n est multiple de 99 999, puisque 11 111 est premier à 9. Notons x (resp. y) le nombre formé les cinq premiers (resp. derniers) chiffres de n. On a $n = 10^5 x + y$ et $x + y \equiv 0 \pmod{99\,999}$. Mais $0 < x + y < 2 \times 99\,999$, donc $x + y = 99\,999$. Autrement dit, comme il ne peut y avoir de retenue :

$$a + f = b + g = c + h = d + i = e + j = 9$$

Réciproquement, il est clair que si l'on choisit a, …, j tous distincts vérifiant cette dernière condition et $a \neq 0$, on obtient une solution du problème. Il ne reste donc qu'à dénombrer les 10-uplets qui conviennent.

Les paires $\{a, f\}$, …, $\{e, j\}$ sont une permutation des paires $\{0, 9\}$, …, $\{4, 5\}$: il y a $5! = 120$ choix possibles, et donc $2^5 \cdot 120$ façons d'affecter des valeurs acceptables à a,…,f. Cependant, il faut éliminer les cas où $a = 0$, qui représentent un cas sur dix. On trouve donc $9/10 \cdot 32 \cdot 120 = 3456$ solutions.

Corrigé 2.

On note a, b, c les longueurs des côtés. On a vu (voir S.T.A.T. exercice 2) que $R^2 - OG^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/9$. Par ailleurs, l'aire S du triangle est donnée par :

$$S = pr = \frac{abc}{4R}$$

avec p le demi-périmètre. On en déduit que $2rR = abc/(a+b+c)$. De plus, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique sur chacun des facteurs, on a :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geqslant 9abc$$

de sorte que $2rR \leqslant R^2 - OG^2$, ce qui conclut.

Corrigé 3.

Oui. On va démontrer en fait le résultat un peu plus général suivant : pour tout entier m et tout ensemble fini S de nombres premiers, Dolphock peut rendre blanc l'ensemble $Q_m(S)$ des entiers de 2 à m dont les diviseurs premiers sont dans S, si on l'a initialement colorié en noir, en choisissant successivement les éléments d'une certaine partie $R_m(S)$ de $Q_m(S)$.

Pour le voir, on procède par récurrence sur le cardinal n de S. Si $n = 1$, $Q_m(S)$ est ou bien vide, ou bien formé de multiples d'un même nombre premier p : Dolphock peut donc le rendre blanc en une étape en choisissant p (i.e. on peut prendre $R_m(S) = \{p\}$).

On se donne maintenant $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ avec $n > 1$, et on suppose le résultat démontré pour tout m et tout ensemble d'au plus $n - 1$ nombres premiers. Soit donc $T = \{p_1, \ldots, p_{n-1}$, et t le plus grand entier naturel tel que $tp_n \leqslant m$. Si $t = 0$, ça signifie qu'il n'apparaît aucun multiple de p_n parmi les entiers $\leqslant m$, si bien que $Q_m(S) = Q_m(T)$ et il n'y a rien à prouver. On peut donc supposer $t \geqslant 1$.

Imaginons alors que, $Q_m(S)$ étant initialement noir, Dolphock choisisse successivement les éléments de $R_m(T)$, puis ceux de $R_t(T)$, et enfin ceux de $p_n \cdot R_t(T) = \{p_n x \ / \ x \in R_t(T)\}$, et examinons la couleur d'un élément $y \in Q_m(S)$ après ces opérations :

- *si y n'est pas divisible par p_n,* l'étape de sélection de $R_m(T)$ le rend blanc. Et si, lors de la sélection de $R_t(T)$, le choix d'un certain x change la couleur de y, le choix de $p_n x$ lors de la sélection de $p_n \cdot R_t(T)$ le rechange. Au final, y est donc toujours blanc.
- *si y est une puissance de p_n,* les deux premières étapes, de sélection de $R_m(T)$ et $R_t(T)$ ne modifient pas p_n. Et sa couleur est inversée par chaque élément de $p_n \cdot R_t(T)$, donc il est au final blanc ou noir selon la parité de $|R_t(T)|$.
- *si y est un multiple mais pas une puissane de p_n,* la première étape le rend blanc, et comme il est divisible par l'un des nombres premiers de T, le choix de $R_t(T)$ le fait redevenir noir. Ensuite sa couleur est inversée par chaque élément de $p_n \cdot R_t(T)$, donc il est également blanc ou noir selon la parité de $|R_t(T)|$, de la même façon que les puissances de p_n.

Après ces opérations, tous les nombres premiers à p sont blancs, et tous les multiples de p ont la même couleur : si ce n'est pas blanc, Dolphock peut choisir p pour terminer de blanchir $Q_m(S)$

Pour cet exercice, on peut prendre $m = 1\,000\,000$, S l'ensemble des nombres premiers plus petits que m. Dolphock peut blanchir tous les nombres de 2 à m d'après ce qui précède, et choisir l'entier 1 pour terminer.

Sixième partie

Johan et les Olympiades 2004 (JO 2012)

Chapitre 1

Énoncés des OIM 2004

Exercice 1.

Soit ABC un triangle aux angles aigus, non isocèle. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits à BMR et CNR se coupent sur le segment $[BC]$.

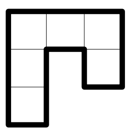
Exercice 2.

Trouver tous les polynômes P tels que pour tous réels a, b, c vérifiant $ab+bc+ca=0$, on ait :

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

Exercice 3.

On appelle *crochet* une figure constituée de six carrés unité disposés comme ci-dessous



ou toute figure obtenue à partir de celle-ci par rotations et réflexions.

Trouver tous les couples (m,n) tels que le rectangle de taille $m \times n$ soit pavable par des crochets, i.e. tels que :

– un tel rectangle est recouvert par des crochets sans trou et sans chevauchement ;
– aucun crochet ne sort du rectangle.

Exercice 4.

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Soient $t_1, \ldots, t_n$ des réels strictement positifs. On suppose

$$n^2+1 > (t_1+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$$

Montrer que pour i, j, k distincts, t_i, t_j, t_k sont les longueurs des côtés d'un triangle.

Exercice 5.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que $[BD]$ n'est pas la bissectrice de $\widehat{ABC}$ ni $\widehat{CDA}$. Soit P intérieur à $ABCD$, tel que $\widehat{PBC} = \widehat{DBA}$ et $\widehat{PDC} = \widehat{BDA}$.

Montrer que $ABCD$ est incriptible si et seulement si $AP = CP$.

Exercice 6.

On dit qu'un nombre n est *alternant* si deux chiffres consécutifs de l'écriture décimale de n sont toujours de parité différente. Trouver tous les nombres possédant un multiple alternant.

Chapitre 2

Corrigés

Corrigé 1.

Plusieurs remarques :

1. Remarquer que M et N sont les pieds des hauteurs. Surtout faire une figure soigneuse pour identifier le point d'intersection des cercles, que l'on notera L
2. En calculant des angles, on se rend compte que L est en fait le pied de la bissectrice issue de A
3. MON est isocèle. Donc R est en fait l'intersection de la bissectrice de $\widehat{MAN}$ et la médiatrice de $[MN]$. **Il est alors bien connu que R est sur le cercle circonscrit à AMN.** [1] [2]

On écrit les angles en M et N, d'où en R. Et les valeurs des angles de $BMRL$ prouvent qu'il est incriptible. D'où le résultat.

Remarque : on peut généraliser à un cercle quelconque passant par B et C.

Corrigé 2.

Exercice à assez peu d'intérêt. Le fait que P soit un polynôme modifie grandement la technique traditionnelle à utiliser pour les équations fonctionnelles.

Première solution. On constate assez rapidement que $P = X^2$ et $P = X^4$ conviennent. En effet, si $ab + bc + ca = 0$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) \\ &= 2(a^2+b^2+c^2) + 4(ab+bc+ca) = 2(a+b+c)^2 \\ 4(a+b+c)^4 &= ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)^2 \qquad = 2((a-b)^4 + (b-c\end{aligned}$$

car en posant $u = (a-b)$, $v = (b-c)$, $z = (c-a)$, on a :

$$(u^2+v^2+w^2)^2 - 2(u^4+v^4+z^4) \begin{aligned} &= -u^4 - v^4 - z^4 + 2u^2v^2 + 2v^2w^2 + 2w^2u^2 \\ &= (u+v+w)(v+w-u)(w+u-v)(u+v-w) = 0^3\end{aligned}$$

Par linéarité, on remarque aussi que tout polynôme $P = aX^4 + bX^2$ convient. On peut aussi remarquer que les seul monômes solutions sont X^2 et X^4.

---

[1] La bissectrice coupe l'arc BC en deux parties égales

[2] Noter que AMN n'est pas isocèle, sinon la conclusion est fausse. Par exemple : $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

En effet, si $b = c = 0$, la condition est vérifiée et on trouve $P(a) + P(-a) = 2P(a)$, soit $P(a) = P(-a)$. Donc P est pair. Soit $P = X^{2k}$ Pour $(a, b, c) = (6, 3, -2)$, on obtient $9^k + 25^k + 64^k = 2 \times 49^k$). Donc $\left(\frac{64}{49}\right)^k < 2$.

Pour $k = 1$, ça marche, et si $k \geqslant 3$, $\frac{64^3}{49^3} > \frac{262144}{125000} > 2$. Comme $P = 1$ ne convient pas, les seuls monômes convenables sont X^2 et X^4.

Maintenant, soit P une solution. On remarque que $ab + bc + ca = 0$ est une relation homogène. Posons $P = \sum u_k X^k$. La relation fonctionnelle s'écrit pout tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k t^k ((a-b)^k + (b-c)^k + (c-a)^k) = 2 \sum_{k=1}^{n} u_k t^k (a+b+c)^k$$

Ceci étant vrai pour tout réel t, les coefficients sont égaux. Donc on a l'égalité :

$$u_k((a-b)^k + (b-c)^k + (c-a)^k) = 2u_k(a+b+c)^k$$

On retrouve la relation de X^k, donc $u_k = 0$, sauf si $k = 2$ ou $k = 4$. Finalement P est de la forme $\lambda X^2 + \mu X^4$.

Une autre méthode consiste à poser $c = -\frac{ab}{a+b}$ et à développer.

Seconde solution. P est évidemment pair (on l'a vu en posant $b = c = 0$). Posons $P = Q(X^2)$. La relation devient :

$$Q((a-b)^2) + Q((b-c)^2) + Q((c-a)^2) = 2Q((a+b+c)^2) = 2Q(a^2 + b^2 + c^2)$$

Soit $x = a - b$, $y = b - c$. L'équation s'écrit :

$$Q(x^2) + Q(y^2) + Q(x^2 + 2xy + y^2) = 2Q(x^2 + xy + y^2)$$

Remarquer que x et y peuvent être quelconques. Car $ab + bc + ca = 0$ se traduit en $3c^2 + (2x + 4y)c + y(x + y) = 0$, dont le discriminant vaut

$$(x + y + y)^2 - 3y(x + y) = \frac{1}{2}(y^2 + (x + y)^2 + (x + 2y)^2 >= 0$$

On remplace y par $-y$, et on soustrait. Il reste, en posant $p = x^2 + y^2$ et $q = xy$, pour tout $p \geqslant 2|q|$

$$Q(p + 2q) - Q(p - 2q) = 2Q(p + q) - 2Q(p - q)$$

On dérive par rapport à q trois fois :

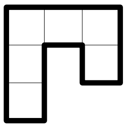
$$8Q^{(3)}(p + 2q) + 8Q^{(3)}(p - 2q) = 2Q^{(3)}(p + q) + 2Q^{(3)}(p - q)$$

Alors en $q = 0$, $Q^{(3)}(p) = 0$. Finalement Q est de degré 2, et on sait que $Q(0) = 0$ (en posant $a = b = c = 0$ dans l'équation initiale).

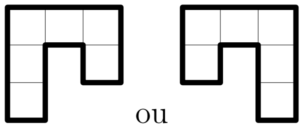
D'où $P = \lambda X^2 + \mu X^4$.

Corrigé 3.

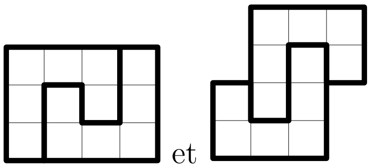
Soit A le crochet représenté par :



Pour paver un rectangle en utilisant le crochet A, on doit recouvrir le trou situé en position (2,2) par un deuxième crochet B ce qui n'est possible qu'avec :



obtenant les deux polyminos C et D suivants :



Les rectangles $m \times n$ pavables avec des crochets sont ceux qui peuvent être pavés avec les polyminos C et D (et leurs transformés par rotations ou réflexions).

- Les rectangles $4 \times 12k$ et $3 \times 12k$ sont pavables avec C. Il en résulte que les rectangles $l \times 12k$ sont pavables dès que l est de la forme $4p + 3q$: on obtient de cette façon tous les entiers l différents de 1, 2, 5. On vérifie que si $l = 1$, 2 ou 5, un rectangle $12k \times l$ n'est pas pavable avec C et D (si $l = 5$, on ne peut pas placer les polyminos qui touchent un côté de longueur 5).
- Il est immédiat que les rectangles $4k \times 3l$ peuvent être pavés à l'aide de C.
- Montrons que si m et n sont pairs, pour que le rectangle soit pavable par C et D, il faut que m ou n soit multiple de 4. Pour cela, disons que le polymino C est (pair, impair) ou (P, I) pour exprimer que les lignes de C ont un nombre pair de cases et que les colonnes ont un nombre impair de cases. On dira de même que D est de type (I, P). Plus généralement, les polyminos images de C et D par rotations ou réflexions sont (P, I) ou (I, P). Soit alors un pavage du rectangle $m \times n$. Chaque ligne est de longueur paire m et est recouverte par son intersection avec un certain nombre de polyminos (I, P) et (P, I). Comme les les polyminos (P, I) apportent un nombre pair de cases, il faut que le nombre de polyminos (I, P) qui intersectent la ligne considérée soit en nombre pair. Faisons ce raisonnement pour une ligne sur 4 (celles dont le numéro est multiple de 4). Chaque polymino (I, P) s'étendant sur quatre lignes consécutives, il intersecte exactement une ligne de ce type : on conclut que le nombre total de polyminos (I, P) est pair. De même, le nombre de polyminos (P, I) est pair. Finalement, le rectangle $m \times n$ est pavé par un nombre pair de polyminos ; chaque polymino contient 12 cases et on conclut que 24 divise mn, ce qui entraîne que m ou n est multiple de 4.

  Remarque. On peut traiter cette partie du problème à l'aide de méthodes de coloriage (voir corrigé oral).

Finalement, les couples (m, n) qui conviennent sont, à permutation près, des deux formes suivantes : $(12k, n)$ avec k quelconque et n différent de 1,2 et 5, et $(4k, 3\ell)$, k et ℓ quelconques.

Remarque. Bien sûr, on peut montrer la partie délicate du problème (le fait que 24 divise mn).

Corrigé 4.

Par symétrie, il suffit de montrer que $t_1 < t_2 + t_3$. Développons l'hypothèse :

$$n^2 + 1 > n + \sum_{i<j} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right)$$

On sépare les termes correspondant à $i < j \leqslant 3$. Les autres, sachant que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$, sont minorés par $n(n-1) - 6$, car il y en a $\frac{1}{2}n(n-1) - 3$ (les 3 qu'on a séparés) :

$$n^2 + 1 > n + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + n(n-1) - 6$$

où $a = t_1$, $b = t_2$, $c = t_3$, qui est en fait le cas $n = 3$. On élimine la deuxième parenthèse. On obtient :

$$5 > \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

Par l'inégalité harmonico-arithmétique, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{4}{b+c}$. Donc $5 > 4\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a}$.

Comme on a encore $\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a} \geqslant 2$, on obtient $3\frac{a}{b+c} < 3$, d'où $a < b + c$, ce qu'il fallait démontrer.

Corrigé 5.

Un exercice difficile. Il est prévisible que le sens inscriptible $\Leftrightarrow$ égalité soit plus facile que l'autre.

Première solution. Un peu inspirée des propriétés des conjugués isogonaux[4]. Elle est évidemment difficile à trouver directement.

Soient X, Y, Z, et T les symétriques de P par rapport à CD, BC, AB, AD respectivement.

(BD) étant l'isogonale de (BP), elle est médiatrice de $[YZ]$. (DB) est l'isogonale de (DP), c'est donc la médiatrice de $[XT]$.

$XYZT$ est donc un trapèze isocèle. Mais $[XY]$ est la base du traingle isocèle XCY, d'angle 2γ, où γ est l'angle en C. Donc $XY = 2CX \sin\gamma$. De même $ZT = 2AT \sin\alpha$.

Par construction, on a $CX = CP$, $AT = AP$, et $XT = ZT$. D'où

$$CP \sin\gamma = AP \sin\alpha$$

On trouve donc le résultat, mais il faut montrer $\alpha \neq \gamma$ (conséquence des hypothèses de l'exercice).

Seconde solution. Étape de recherche : *Supposons $ABCD$ inscriptible. Soit E l'intersection de (BP) avec le cercle, et F l'intersection de (DP) avec le cercle. L'arc EC est identique à AD, et l'arc CF est identique à AB. Il en résulte que les triangles ABC et CEF sont isométriques, donc symétriques par rapport à la médiatrice de $[BF]$. L'égalité*

[4]Le conjugué isogonal de M dans un triangle est M' tel que (AM) et (AM') sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{A}$, et même chose avec B et C

des angles interceptant l'arc DE, on voit que cette médiatrice passe par P et envoie bien BAD sur FCE. D'où $PA = PC$. On comprend alors le fonctionnement.

Soit un quadrilatère $ABCD$ quelconque, et P comme dans l'énoncé. Soient E et F les intersections de (BP) et (DP) avec le cercle Γ circonscrit à BCD.

BAD est donc inversement semblable à FCE. Sans faire intervenir A, on obtient des égalités d'angles suffisantes pour établir la similitude (inverse) de $PBAD$ et $PFCE$. On a donc :

$$PA \times R_{EFC} = PA \times R_{BCD} = PB \times R_{ABD}$$

D'où l'équivalence : $ABCD$ inscriptible $\Leftrightarrow$[5] $R_{ABD} = R_{BCD} \Leftrightarrow PA = PB$.

Corrigé 6.

Cet exercice ne pose pas de problème particulier si on travaille de façon méthodique. Il est même plus facile que le 5 sur certains points : il n'y a pas d'idée très subtile à avoir.

Si un nombre ne marche pas, ses multiples non plus. On peut penser d'abord aux nombres premiers avec 10, et aux nombres de la forme $2^\alpha 5^\beta$. Par exemple, 10 convient, mais pas 20.

On peut conjecturer que tout nombre non divisible par 20 convient (en tout cas, en ce qui concerne les $2^\alpha 5^\beta$). On peut examiner les cas :

1. $n = 2^\alpha$
2. $n = 5^\alpha$
3. $n = 2 \cdot 5^\alpha$ (qui contient le second cas).
4. $n = ab$, où a est d'un des types précédents et b premier avec 10

Examinons les différents cas :

1. ($n = 2^k$). Soit n une puissance de 2. Écrivons $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots$ un éventuel multiple alternant de n. Alors a_0 est forcément pair et $10a_1$ aussi. $10^2 a_2$ et $10^3 a_3$ sont multiples de 8. Et ainsi de suite : donc les $10^{2m} a_{2m} + \cdots$ sont multiples de 2^{2m+1}.

   Par conséquent, il faut choisir les a_k tels que $a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_{2m-1} 10^{2m-1}$ soit multiple de 2^{2m+1}. On va donc les construire par récurrence.

   Montrons que 2^{2n+1} admet un multiple alternant à $2n$ chiffres $\sum_{k=0}^{2n-1} a_k 10^k$.

   Pour $n = 1$, on trouve que 8 admet le multiple 16 à 2 chiffres. Supposons le résultat vrai pour n, et donc que 2^{2n+1} divise $\sum_{k=0}^{2n-1} a_k 10^k = 2^{2n+1} z$.

   On cherche :
   – $x = a_{2n+1}$ (chiffre impair dans $[\![1, 9]\!]$)
   – $y = a_{2n}$ (chiffre pair dans $[\![0, 8]\!]$)
   tels que 2^{2n+3} divise $x \cdot 10^{2n+1} + y \cdot 10^{2n} + z \cdot 10^{2n+1}$. Ceci revient à l'équation :

$$5^{2n+1} x + 5^{2n} + z \equiv 0 \pmod 4$$

[5] Si les cercles étaient différents, il seraient symétriques par (BD), ce qui signifierait que (BD) serait la bissectrice, ce qui est contredit par l'énoncé

En posant $x = 2x' + 1$, $y = 2y'$, la condition devient

$$\begin{cases} 2x' + y' \equiv -z - 1 \pmod 4 \\ x', y' \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

On choisit $x' = 0$ et y' de la bonne façon et ça marche.

2. $(n = 5^k)$. 5^k divise $2 \cdot 5^k$, donc ce sera une conséquence du cas 3.
3. $(n = 2 \cdot 5^k)$. Cette récurrence est un peu plus simple. On veut montrer par récurrence que $2 \cdot 5^n$ divise un nombre de la forme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^k$, avec $a_k \equiv k \pmod{50}$.
   Pour $n = 2$, c'est vrai car 50 divise 50. Supposons que ce soit vrai pour n. On sait que :
   $$2 \cdot 5^n \,\Big|\, \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^k = 2 \cdot 5^n z$$
   On cherche $x = a_n$ de parité égale à celle de n, telle que $0 \leqslant x \leqslant 9$ et $10^n x + 2 \cdot 5^n z$ soit multiple de $2 \cdot 5^{n+1}$ Ceci équivaut à ce que 5 divise $2^{n-1}x + z$. Mais :
   $$2^{n-1}x \equiv -z \pmod 5 \Leftrightarrow x \equiv -3^{n-1}z \pmod 5$$
   ce qui est possible, que ce soit avec $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ou $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, car toutes les congruences modulo 5 sont atteintes.
   Bilan : si b est du type 2^n, 5^n, ou $2 \cdot 5^n$, il a un multiple alternant $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$, $a_k \equiv k[2]$ et n impair.
4. Soit $n = ab$, où a est d'une forme ci-dessus, et $b \wedge 10 = 1$. On cherche donc $N = \underbrace{x \ldots x}_{n \text{ fois}}$ (le nombre x écrit k fois), où x est un multiple alternant de a avec un nombre pair de chiffres, comme on en a trouvé précédemment.
   N est évidemment alternant. Par ailleurs, $N = x\frac{10^{jk}-1}{10^j-1}$, où j est le nombre de chiffres de x. Comme a divise x, il suffit de choisir k tel que $10^{jk}-1$ soit multiple de $(10^j-1)b$.
   Soit $u = 10^n$. u est premier avec $10^j - 1$ et avec b, donc avec $b_3 = (10^j - 1)b$. Par conséquent[6], il existe k tel que :
   $$u^k \equiv 1 \pmod{b_3}$$
   ce qui conclut.

Ainsi tout nombre non multiple de 20 admet un multiple alternant, et ce sont les seuls.

[6]Ce résultat est classique, pour b_3 premier, c'est le petit théorème de Fermat, et dans le cas général, il existe $\alpha \neq \beta$ tels que $u^\alpha \equiv u^\beta$ (par le principe des tiroirs). Alors $u^{\beta-\alpha} \equiv 1$.

Septième partie

Travaux par enveloppes (TPE)

Chapitre 1

Exercices nuisibles au sommeil (ENS)

Exercice 1.

Calculer le produit :

$$\prod_{k=0}^{2^{2004}} \left(4\sin^2 \frac{k\pi}{2^{2005}} - 3\right)$$

Exercice 2.$*$

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1$$

pour tous entiers x et y.

Exercice 3.$*$

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$$

Exercice 4.$*$

Soient T_1 et T_2 deux triangles semblables. On suppose que deux côtés de T_1 et l'angle qu'ils forment sont proportionnels à deux côtés de T_2 et l'angle qu'ils forment (mais pas nécessairement des côtés qui se correspondent). Est-ce qu'alors T_1 et T_2 sont forcément superposables ?

Exercice 5.

Soit O le centre du cercle exinscrit au triangle ABC opposé au sommet A. On note M le milieu de $[AC]$ et P le point d'intersection des droites (MO) et (BC). Montrer que si $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$, alors $AB = BP$.

Exercice 6.

Existe-t-il une bijection du plan dans lui-même tels que pour tous points A et B distincts, on ait (AB) perpendiculaire à $(f(A)f(B))$?

Qu'en est-il si l'on remplace le plan par l'espace ?

Exercice 7.

Un tournoi d'échecs rassemble n joueurs. Dans ce tournoi, chaque joueur rencontre une et une seule fois tous les autres. Après le tournoi, on s'aperçoit que parmi quatre joueurs quelconques, il en existe toujours un qui a fait trois résultats différents (*i.e.* une victoire, un nul et une défaite) contre les autres autres.

Montrer que la plus grande valeur de n possible vérifie l'inégalité $6 \leqslant n \leqslant 9$.

Exercice 8.

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier. On suppose que l'étoile $ACEBD$ a pour aire 1. Les droites (AC) et (BE) se coupent en P et les droites (BD) et (CE) en Q. Déterminer l'aire de $APQD$.

Exercice 9.$*$

Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$$

Exercice 10.$*$

Soit (a_n) une suite d'entiers vérifiant pour tout $n \geqslant 1$:

$$(n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2(n-1)$$

On suppose que 2000 divise a_{1999}. Trouver le plus petit entier $n \geqslant 2$ tel que 2000 divise a_n.

Exercice 11.$*$

Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que $n = d(n)^2$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Exercice 12.

Soient x, y et z des réels positifs ou nuls vérifiant $x+y+z=1$. Montrer que :

$$x^2y+y^2z+z^2x \leqslant \frac{4}{27}$$

et déterminer tous les cas d'égalité.

Exercice 13.

Il y a 99 stations spatiales. Chaque paire de stations est reliée par un tunnel. Il y a 99 tunnels principaux à double sens et tous les autres tunnels sont à sens unique. On dit qu'un groupe de quatre stations est *connexe* s'il est possible d'aller d'une station quelconque de ce groupe à une autre en empruntant uniquement les six tunnels qui relient ces quatre stations.

Déterminer le nombre maximal de groupes connexes.

Exercice 14.

Dans le fraction suivante :

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \cdots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \cdots \div 2}$$

on place comme l'on souhaite des parenthèses dans le numérateur et on recopie le même parenthèse dans le dénominateur. Déterminer toutes les valeurs possibles de l'expression résultante ?

Exercice 15.

On se donne un angle aigu $\widehat{APX}$ dans le plan. Construire un carré $ABCD$ tel que le point P soit à la fois sur le côté $[BC]$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAQ}$ où Q est l'intersection du rayon (?) PX et de la droite (CD).

Exercice 16.$*$

Soit $PQRS$ un quadrilatère inscrit dans un cercle vérifiant $\widehat{PSR} = \frac{\pi}{2}$. On désigne par H et K les projetés orthogonaux de Q respectivement sur les droites (PR) et (PS). Montrer que (HK) est la médiatrice (?) du segment $[QS]$.

Exercice 17.

Soient s et t deux entiers non nuls. Un mouvement élémentaire transforme le couple (x, y) en $(x-t, y-s)$. Le couple (x, y) est dit *correct* s'il est possible d'obtenir à partir de celui-ci un couple (a, b) où a et b ne sont pas premiers entre eux par une suite de mouvements élémentaires.

a) Est-ce que (s, t) est un couple correct ?

b) Montrer que pour tout (s, t), il existe un couple (x, y) qui n'est pas correct.

Exercice 18.$*$

J'ai choisi $n \geqslant 5$ nombres qui ont les propriétés suivantes :

1. aucun n'est nul
2. l'un d'entre eux est 2005
3. quatre d'entre eux peuvent toujours être réarrangés pour former une progression géométrique.

Quels sont ces nombres ?

Exercice 19.

Soit ABC un triangle rectangle en C. Les carrés S_1 et S_2 ont leurs sommets sur les côtés de ABC. De plus, C est un sommet de S_1 et S_2 a tout un côté entièrement sur le segment $[AB]$. Si l'aire de S_1 vaut 441 et celle de S_2 vaut 440, combien vaut $AC + BC$?

Exercice 20.$*$

Soit n un entier strictement positif. Quel est, en fonction de n, le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs solutions de l'équation :

$$x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$$

Montrer de plus que ce nombre n'est jamais un carré.

Exercice 21.

Les milieux des six arêtes d'un tétraèdre sont sur une même sphère de rayon 1. Quel est le volume maximal d'un tel tétraèdre ?

Exercice 22.$*$

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $a^n + b^n = c^n$. Pour quel entier k existe-t-il un triangle obtusangle (*i.e.* avec un angle obtus) dont les longueurs sont a^k, b^k et c^k ?

Exercice 23.$*$

Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs vérifiant :

1. il n'existe aucun entier $d > 1$ divisant tous les termes de la suite
2. aucun terme de la suite n'en divise un autre
3. deux termes quelconques de la suite ne sont jamais premiers entre eux

---

Exercice 24.

Soit ABC un triangle. On appelle I le centre de son cercle inscrit, I et D le deuxième point d'intersection de (AI) et du cercle circonscrit à ABC. On note E et F les projetés orthogonaux de I respectivement sur (BD) et (CD). Si $IE + IE = AD/2$, combien vaut l'angle $\widehat{BAC}$?

Exercice 25.

On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_0 = 0$ et :

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} + \frac{3^{r-1}-1}{2} & \text{si } n = 3^r(3k+1) \\ x_{n-1} - \frac{3^{r-1}+1}{2} & \text{si } n = 3^r(3k+2) \end{cases}$$

où k et r sont des entiers positifs. Prouver que x_n prend une et une seule fois chaque valeur entière.

Exercice 26.

On note $n(r)$ le nombre maximal de points à coordonnées entières sur un cercle de rayon r. Montrer que $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Exercice 27.$*$

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

pour tous réels x et y.

Exercice 28.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que pour tout $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$, on ait :

$$|x_{\sigma(p)} + \ldots x_{\sigma(q)}| < 2 - \frac{1}{n}$$

La propriété reste-t-elle vraie si on remplace $2 - \frac{1}{n}$ par $2 - \frac{4}{n}$.

Exercice 29. $*$

Soit ABC un triangle. On note D le pied de la hauteur issue de A, E l'intersection de (AC) et de la bissectrice de l'angle $\hat{B}$ et finalement F le milieu de $[AB]$. Prouver que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes si, et seulement si :

$$a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c)$$

où par définition $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

Exercice 30. $*$

On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, u_{n+1} est le plus petit entier strictement supérieur à u_n tel que l'ensemble $\{u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ ne contienne pas trois nombres en progression arithmétique. Calculer u_{100}.

Exercice 31. $*$

Une fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ vérifie :

1. $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tous entiers a et b premiers entre eux
2. $f(p+q) = f(p) + f(q)$ pour tous nombres premiers p et q.

Montrer que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ et $f(1999) = 1999$.

Exercice 32.

Dans un damier 2005×2005, certaines cases sont peintes en noir et les autres sont laissées blanches. Pour chaque case blanche, on suppose qu'il y a au moins 2005 cases noires sur la réunion de la ligne et de la colonne définie par la case blanche. Quel est le nombre minimum de cases noires sur le damier ?

Exercice 33. $*$

Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$|f(m+n) - f(m)| \leqslant \frac{n}{m}$$

pour tous rationnels m et n strictement positifs. Montrer que pour tout entier k, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} |f(2^k) - f(2^i)| \leqslant \frac{k(k-1)}{2}$$

Exercice 34.

Pour tout entier n, on note $S(n)$ la somme des chiffres de son écriture en base 10. Prouver qu'il existe des entiers $n_1, \ldots, n_{2005}$ tels que :

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = \ldots = n_{2005} + S(n_{2005})$$

Exercice 35.

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des entiers. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_i - b_j|$$

Exercice 36.$*$

Soient a, b et c des entiers positifs non nuls avec $a \neq c$. On suppose que :

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$$

Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas premier.

Exercice 37.

Prouver que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe n entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en progression arithmétique et n entiers strictement positifs $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en progression géométriques tels que :

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_n < a_n$$

Donner un exemple explicite pour $n = 5$.

Exercice 38.

Deux cercles se coupent en A et B. Soit d une droite passant par A. Elle recoupe les cercles aux points C et D. On appelle M et N les « milieux » respectifs des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{BD}$ qui ne contiennent pas A. On note finalement K le milieu de $[CD]$.

Montrer que l'angle $\widehat{MKN}$ est droit.

Exercice 39.

Soient $n \geqslant 3$ un entier et $A_1, \ldots, A_n$ des points cocycliques. Quel est le nombre maximal de triangles acutangles (*i.e.* avec seulement des angles aigus) dont les sommets sont les A_i.

Exercice 40.

Soit P un polyèdre. Existe-il forcément trois arètes de P dont les longueurs sont celles d'un triangle ?

Exercice 41.$*$

L'entier naturel A a la propriété suivante : la somme des entiers compris entre 1 et A inclus s'écrit en base 10 comme A suivi de trois chiffres. Trouver A.

Exercice 42.$*$

Soit k un entier. On se donne 40 verres plus ou moins remplis. Étant donné k verres, il est autorisé de transvaser du liquide de l'un à l'autre pour égaliser le volume que chacun contient.

Trouver le plus petit k pour lequel il est toujours possible d'égaliser le volume de liquide contenu dans chaque verre.

Exercice 43.$*$

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On note A_1 (resp. C_1) le symétrique de A (resp. de C) par rapport à (BC) (resp. à (AB)). On suppose que les points A_1, B et C_1 sont alignés et que $C_1B = 2A_1B$. Montrer que l'angle $\widehat{CA_1B}$ est droit.

Exercice 44.

On dispose d'un jeu complet de dominos, *i.e.* pour tout entiers i et j vérifiant $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ (n fixé), il y a un et un seul domino avec les nombres i et j.

Deux joueurs jouent au jeu classique des dominos, à l'exception notable qu'ils choisissent à chaque fois leur domino pendant tous les dominos restants. Quel joueur a une stratégie gagnante ?

Exercice 45.$*$

Les réels x, y et z sont strictement positifs et leur produit fait 1. Montrer que si :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z$$

alors :

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k$$

pour tout entier $k > 0$.

Exercice 46.

Montrer que tout entier s'écrit comme différence de deux entiers naturels dont la somme des diviseurs premiers est la même.

Exercice 47.

Dans le plan, on se donne un cercle Γ, un point A à l'intérieur de Γ et un point B distinct de A.

Montrer que tous les triangles BXY tel que X et Y sont des points de Γ et A appartient à la corde $[XY]$ ont le centre de leur cercle circonscrit sur une droite fixe.

Exercice 48.

Existe-t-il 10 entiers deux à deux distincts tel que la somme de 9 quelconques d'entre eux soit toujours un carré parfait.

Exercice 49.

Dans l'écriture décimale de A, les chiffres apparaissent en ordre croissant. Quelle est la somme des chiffres de $9A$.

Exercice 50.$*$

Pour tout réel x, on dénote par $\{x\}$ sa partie décimale. Montrer que pour tout entier n, on a la majoration :

$$\sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}$$

Exercice 51.

Soient n un entier naturel et p un nombre premier. Montrer qu'il existe des sous-ensembles $E_1, \ldots, E_{p^{n+1}}$ de $\{1, \ldots, p^2\}$ de cardinal p tels que pour tous i et j, le cardinal de $E_i \cap E_j$ soit majoré par n.

Exercice 52.

Soit ABC un triangle acutangle (*i.e.* dont tous les angles sont aigus) et D un point intérieur à ABC tel que :

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$$

Déterminer la position de D.

Exercice 53.

Soient x, a et b des entiers strictement positifs tels que $x^{a+b} = a^b b$. Montrer que $a = x$ et $b = x^x$.

Exercice 54.$*$

Soient ABC un triangle équilatéral et P un point intérieur à ABC dont les distances respectives aux trois côtés sont 3, 4 et 5. Calculer l'aire de ABC.

Exercice 55.$*$

On considère un parallélépipède dont l'aire de $216\,\mathrm{cm}^2$ et dont le volume est $216\,\mathrm{cm}^3$. Montrer que ce parallélépipède est un cube.

Exercice 56.

On se donne un entier $n \geqslant 3$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des entiers. Montrer que la suite $a_1, \ldots, a_n$ forme une progression arithmétique si, et seulement s'il existe une partition de $\mathbb{N}$ en n parties $A_1, \ldots, A_n$ telle que :

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \cdots = a_n + A_n$$

Exercice 57.$*$

Trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x + y) = f(x)u(y) + f(y)$$

Exercice 58.$*$

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Trouver toutes les valeurs possibles de a et b pour lesquelles les équations $f(x) = 0$ et $f(f(x)) = 0$ ont le même ensemble non vide de solutions.

Exercice 59.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}$ telles que pour tout entier n, on ait :

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 168$$

Exercice 60.

Par combien de zéros peut se terminer le nombre $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$?

Exercice 61.

Dans un certain pays, il y a 2005 villes (dont une capitale) et chaque paire de villes est reliée par un vol direct. Les prix des billets sur chacun des vols précédents sont distincts deux à deux.

Est-il possible que tous les voyages partant de la capitale, passant au plus une fois par chaque autre ville, et revenant ensuite à la capitale aient tous des prix différents ?

Exercice 62.$*$

Existe-t-il un polynôme f de degré 2005 tel que pour tout entier $n > 0$, les nombres $f(n), f \circ f(n), f \circ f \circ f(n), \ldots$ soient premiers entre eux deux à deux ?

Exercice 63.$*$

Posons $f(n) = n!$. Le nombre :

$$a = 0\,,\ f(1)\ f(2)\ f(3)\ \ldots$$

est-il rationnel ?

Exercice 64.

Une suite $(p_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres premiers vérifie la condition suivante : pour tout $n \geqslant 3$, p_n est le plus grand diviseur premier de $p_{n-1} + p_{n-2} + 2000$.

Montrer que la suite (p_n) est bornée.

Exercice 65.$*$

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$|f(x+y) - \sin x - \sin y| \leqslant 1$$

pour tous réels x et y ?

Exercice 66.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$|f(x+y) - f(x) - g(y)| \leqslant 1$$

pour tous réels x et y. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $|g(x) - f(x) \leqslant 1$ pour tout x et $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tous x et y.

Exercice 67.$*$

On sélectionne un certain nombre de polynômes unitaires de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes sélectionnés.

Exercice 68.

Soit un triangle ABC tel que $BC \leqslant CA \leqslant AB$. On note R et r les rayons respectifs des centres circonscrits et inscrits à ABC. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur l'angle $\hat{C}$, la quantité $BC + CA - 2R - 2r$ est-elle strictement positive ?

Exercice 69.$*$

Prouver qu'au moins 99% des nombres suivants sont composés :

$$10^1 + 1\,;\ 10^2 + 1\,;\ 10^3 + 1\,;\ \ldots 10^{2000} + 1$$

Exercice 70.

Quel est le nombre maximal de rectangle de taille $1 \times 10\sqrt{2}$ que l'on peut découper dans une feuille rectangulaire de taille 50×90 si l'on impose que les coupes doivent toutes se faire parallèlement aux bords de la feuille ?

Chapitre 2

Urne des propositions de solutions (UPS)

Solution de l'exercice 2, *proposée par Nicolas Fiszman, Thomas Templier.*

On fait $x = y = 0$ dans l'équation, il vient :

$$f(0) + f(0) = f(0)^2 + 1$$

d'où $f(0) = 1$. En prenant $x = -y = 1$, on obtient :

$$f(0) + f(-1) = f(1)f(-1) + 1$$

ce qui donne $f(1) = 1$ ou $f(-1) = 0$. On suppose dans un premier temps $f(1) = 1$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ quelconque. Avec $x = a - 1$ et $y = 1$, on obtient directement $f(a) = 1$. Dans ce cas, f est donc la fonction constante égale à 1.

Passons au second cas : $f(-1) = 0$. En faisant $x = y = -1$, on a $f(-2) + f(1) = 1$. De plus, avec $x = -2$ et $y = 1$, il vient :

$$f(-2) = f(-2)f(1) + 1 = f(-2)(1 - f(-2)) + 1$$

et en résolvant l'équation on obtient $f(-2) = \pm 1$, ce qui donne deux sous-cas.

Si $f(-2) = -1$, on a $f(1) = 2$ et pour tout entier n :

$$f(n + 1) + f(n) = f(n)f(1) + 1 = 2f(n) + 1$$

d'où $f(n + 1) = f(n) + 1$. On en déduit par (deux) récurrence(s) que $f(n) = n + 1$ pour tout entier relatif n.

Si $f(-2) = 1$, on a $f(1) = 0$ et pour tout entier n :

$$f(n + 1) + f(n) = f(n)f(1) + 1 = 1$$

Par (deux) récurrence(s), on prouve que f est la fonction qui associe 1 aux entiers pairs et 0 aux entiers impairs.

Solution de l'exercice 3, *proposée par Kevin Webster.*

Posons :

$$S = \frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$S \cdot (1 + ab + 1 + bc + 1 + ca) \geqslant 3^2 = 9$$

Par ailleurs, l'inégalité de réordonnement donne $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2 = 3$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4, *proposée par Sunghwa Ro.*

Non. Voici un contre-exemple. On vérifie facilement qu'on peut trouver un réel $x > 1$ tel que $AB = 1$, $BC = x$, $CA = x^2$ soient les côtés d'un triangle ABC. Un tel triangle n'est pas isocèle, donc si l'on note :

$$t = \frac{\hat{B}}{\hat{C}}$$

on a $t \neq 1$. On considère le triangle $A'B'C'$, avec $A'B' = t$, $B'C' = tx$ et $C'A' = t/x$. Le triangle ABC est semblable à $C'A'B'$ dans cet ordre, et AB, BC et $\hat{B}$ sont respectivement proportionnels à $A'B'$, $B'C'$ et $\hat{B}'$. De plus, on peut choisir x tel que $t \neq x$ (d'après la loi des sinus), donc ABC et $A'B'C'$ peuvent être pris non isométriques.

Solution de l'exercice 9, *proposée par Bruno Le Floch.*

Pour $y < -3$ ou $y > 0$, on a $y(y+3) > 0$ et donc $(y+1)^3 > y^3 + 2y^2 + 1$. Si de plus (x, y) est solution, on obtient donc $x^3 < (y+1)^3$, et donc $x < y + 1$. Par ailleurs, $x > y$ d'après l'équation, donc il n'y a pas de solution pour $y \notin \{-3, -2, -1, 0\}$.

En testant les cas restants un par un, on trouve exactement trois solutions (x, y) à l'équation, à savoir $(-2, -3)$, $(1, -2)$ et $(1, 0)$.

Solution de l'exercice 10, *proposée par Fathi Ben Aribi.*

Pour $n = 1$, on trouve $(1-1)a_2 = (1+1)a_1 - 2(1-1)$, soit $a_1 = 0$. Et si $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n-1}a_n - 2$.

Soit $x = a_2$. Alors $a_3 = 3x - 2$, $a_4 = 6x - 6$, etc. Montrons par récurrence que $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)x - (n-1)(n-2)$. Pour $n = 2$, c'est vrai. Supposons que ce soit vrai pour un $n \geqslant 2$. Au rang $n+1$, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+1}{n-1}a_n - 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)x - (n-1)(n-2) - 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)x - n(n-1) \end{aligned}$$

qui est la formule au rang $n+1$. Donc pour tout $n > 1$, on a : $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)x - (n-1)(n-2)$. En calculant modulo 2000, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{1999} &\equiv \frac{1}{2}1999 \times 1998x - 1998 \times 1997 \\ &\equiv 999(1999x - 2 \times 1997) \\ &\equiv 999(-x + 6) \end{aligned}$$

Ainsi 2000 divise $999(6-x)$, d'où $x \equiv 6 \mod 2000$. On peut donc calculer a_n modulo 2000.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}n(n-1)x - (n-1)(n-2) \\ &\equiv 3n(n-1)x - (n-1)(n-2) \\ &\equiv 2n^2 - 2 \end{aligned}$$

2000 divise $2n^2-2$ si et seulement si 1000 divise $n^2-1=(n+1)(n-1)$, donc 5^3 divise un des facteurs (il ne peuvent être tous multiples de 5). Par ailleurs, les facteurs doivent être pairs, donc il faut au moins $n+1=250$.

On constate que $250 \times 248 = 62000$ convient. Donc le plus petit n convenable est 249.

Solution de l'exercice 11, *proposée par Bruno Le Floch.*

Soit n un entier vérifiant $n = d(n)^2$. On décompose $d(n)$ en facteurs premiers :

$$d(n) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

Alors :

$$n = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_r^{2\alpha_r} \quad \text{et donc} \quad d(n) = (2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_r+1)$$

En particulier, $d(n)$ est impair, et donc les nombres premiers p_i qui interviennent dans sa décomposition sont supérieurs à 3. On remarque alors que pour tout tel nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 1$, on a :

$$p^\alpha - 1 = (p-1)(p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \cdots + p + 1) \geqslant (p-1)\cdot\alpha \geqslant 2\alpha$$

avec égalité si et seulement si $p-1=2$, i.e. $p=3$, et $p^k=1$ pour tout $k<\alpha$, i.e. $\alpha=1$. Ainsi :

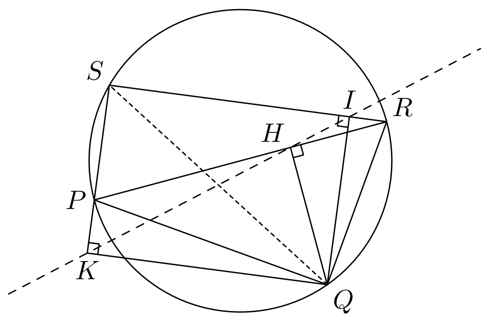
$$p^{2\alpha} \geqslant (2\alpha+1)^2$$

avec égalité si et seulement si $p=3$ et $\alpha=1$. Ainsi :

$$n = d(n)^2 = \prod p_i^{2\alpha_i} \geqslant \prod (2\alpha_i+1)^2 = d(n)^2$$

ce qui assure que l'inégalité est une égalité, et donc que si $r \neq 0$, il n'apparaît que le nombre premier 3 dans cette décomposition, et que l'exposant α correspondant est 1. Ainsi, $n=1$ ou $n=(2+1)^2=9$, et ces deux entiers fournissent bien des solutions, comme on le vérifie aussitôt.

Solution de l'exercice 16, *proposée par Fathi Ben Aribi.*



Notons I le projeté orthogonal de Q sur (RS). Comme Q appartient au cercle circonscrit à PRS, les points K, H et I sont alignés d'après le théorème de Simson.

Par ailleurs, le quadrilatère $QKSI$ a trois angles droits. C'est donc un rectangle, et ses diagonales $[KI]$ et $[QS]$ se coupent en leur milieu. En particulier, $(KH) = (KI)$ coupe $[QS]$ en son milieu, comme demandé.

Solution de l'exercice 18, *proposée par Agathe Benoît, Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois et Irène Marcovici.*

Soit a, b, c, d, e cinq nombres parmi ceux choisis, avec $|a| \leqslant |b| \leqslant |c| \leqslant |d| \leqslant |e|$. Comme une permutation de a, b, c, d forme une progression géométrique, leurs valeurs absolues aussi, et vu l'ordre dans lequel elles sont rangées, il vient :

$$\frac{|b|}{|a|} = \frac{|c|}{|b|} = \frac{|d|}{|c|}$$

On a une identité analogue en remplaçant d par e, d'où $|d| = |e|$. Il vient de la même manière $|a| = |b| = |c| = |d| = |e|$.

D'autre part, parmi ces cinq nombres, au moins trois ont même signe. Si l'on considère ces trois-là et un quelconque quatrième, il ne peut y avoir de progression arithmétique entre les quatre nombres considérés que s'ils ont même signe. On en déduit que $a = b = c = d = e$, et ainsi tous les nombres choisis sont égaux (à 2005, nécessairement).

Solution de l'exercice 20, *proposée par Laurent Deproit, Pierre Kreitmann, Xavier Ploquin.*

L'équation se factorise sous la forme :

$$(x+y)(x-y) = 2^{2n+2} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n+2}$$

On a donc $x - y$ et $x + y$ pairs (car ils sont de même parité) : on pose $x - y = 2a$ et $x + y = 2b$. Il vient :

$$ab = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n+2}$$

Chaque solution de cette dernière équation avec $a < b$ fournit une solution de l'équation de départ. On est donc amené à déterminer le nombre de diviseurs d de $2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n+2}$ tels $d < 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{n+1}$. il y en a exactement :

$$\frac{(2n+1)^2(2n+3)-1}{2} = 4n^3 + 10n^2 + 7n + 1 = (n+1)(4n^2+6n+1)$$

Il reste à montrer que ce dernier nombre n'est jamais un carré. On remarque que $4n^2 + 6n + 1 = (n+1)(4n+2) - 1$ et donc que les facteurs $n + 1$ et $4n^2 + 6n + 1$ sont premiers entre eux. Ainsi, il suffit de prouver que $4n^2 + 6n + 1$ n'est jamais un carré. Or on a :

$$(2n+1)^2 < 4n^2 + 6n + 1 < (2n+2)^2$$

ce qui conclut directement.

Solution de l'exercice 22, *proposée par Fathi Ben Aribi.*

Convenons qu'un triangle rectangle ou aplati n'est pas obtusangle, afin d'éviter les cas dégénérés.

Montrons tout d'abord que si $a^n + b^n = c^n$, alors $a^m + b^m < c^m$ pour tout $m > n$. En effet, on a c strictement plus grand que a et b, et donc :

$$a^m + b^m < a^n c^{m-n} + b^n c^{m-n} = (a^n + b^n)c^{m-n} = c^m$$

On en déduit que si $k \geqslant n$, les nombres a^k, b^k, c^k ne sont pas les longueurs des côtés d'un triangle.

On montre de même que si $k < n$, les nombres a^k, b^k et c^k sont bien les côtés d'un triangle (comme c^k est la plus grande longueur, il suffit de vérifier que l'on a bien, alors, $c^k < a^k + b^k$). Il s'agit de voir à quelle condition sur k il est obtusangle. Notons par exemple α l'angle opposé au côté de longueur a^k. La relation d'Al Kashi s'écrit :

$$a^{2k} = b^{2k} + c^{2k} - 2b^k c^k \cos\alpha$$

Ainsi α est aigu (ou droit), i.e. $\cos\alpha \geqslant 0$, si et seulement si $a^{2k} \leqslant b^{2k} + c^{2k}$. En écrivant les relations analogues pour les autres angles, on voit que le triangle est acutangle si et seulement si a^{2k}, b^{2k} et c^{2k} sont les côtés d'un triangle (éventuellement aplati), c'est-à-dire $2k \leqslant n$ d'après ce qui précède.

Finalement, les k qui conviennent sont les réels de $]n/2, n[$.

Solution de l'exercice 23, *proposée par Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois, Bruno Le Floch, Irène Marcovici, Ilia Smilga et Thomas Templier.*

Oui. Appelons p_n le n-ième nombre premier. Un exemple est donné par la suite formée des nombres p_1p_3, p_2p_3 et $p_1p_2p_n$ pour tout $n > 3$. La vérification est claire.

Solution de l'exercice 27, *proposée par Agathe Benoît, Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois et Irène Marcovici.*

En effectuant $y = -f(x)$ dans l'équation fonctionnelle, il vient :

$$f(0) = f(f(x) - f(x)) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2$$

Et par ailleurs, si l'on pose $y = x^2$, on obtient :

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4f(x)x^2$$

Il en résulte que pour tout réel x :

$$f(x)^2 = f(x)x^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = x^2 \text{ ou } 0$$

En particulier, $f(0) = 0$.

Supposons que f s'annule une deuxième fois, disons en $a \neq 0$. On va voir qu'alors f est identiquement nulle. En effet, l'équation fonctionnalle appliquée en $x = a$ donne, pour tout réel y :

$$f(y) = f(f(a) + y) = f(a^2 - y) + 4f(a)y = f(a^2 - y)$$

Considérons un réel $y \neq 0$ quelconque. Si l'on avait $f(y) = y^2$, il viendrait alors $f(a^2-y) = y^2$, donc comme $y^2 \neq 0$, nécessairement $y^2 = a^2 - y^2$. Ainsi $f(y) = 0$ pour tout y sauf peut-être $y_0 = a^2/2$. Mais alors, l'équation fonctionnelle appliquée pour $x = 0$ et $y = y_0$ donne :

$$f(y_0) = f(f(0) + y_0) = f(f(0) - y_0) + 4f(0)y_0 = f(-y_0) = 0$$

et donc f est identiquement nulle.

Ainsi, ou bien f est la fonction nulle, ou bien $f(x) = x^2$ pour tout x. Réciproquement, ces deux fonctions vérifient bien l'équation demandée.

Solution de l'exercice 29, *proposée par Agathe Benoît, Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois, Bruno Le Floch, Ilia Smilga.*

Pour ne pas écrire de mesures algébriques, on suppose le triangle acutangle.

Supposons que les trois droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes. D'après le théorème de Céva, on a :

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

On a d'une part $\frac{FA}{FB} = 1$ et d'autre part $\frac{EC}{EA} = \frac{a}{c}$. En notant α, β et γ les angles du triangle ABC, on a :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}$$

La relation devient alors :

$$a\cos\beta = b\cos\gamma$$

Par ailleurs, la relation d'Al-Kashi donne :

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad \text{et} \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

En réinjectant les expressions précédentes, on retrouve la formule de l'énoncé.

La réciproque se traite de façon analogue (on utilise la réciproque de Céva, bien entendu).

Solution de l'exercice 30, *proposée par Sunghwa Ro.*

Résumé. Par une méthode exhaustive, on trouve $u_{100} = 981$.

Remarque (et exercice au lecteur). On aurait pu remarquer que u_n est obtenu en lisant en base 3 l'écriture en base 2 de n.

Solution de l'exercice 31, *proposée par Agathe Benoît, Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois, Bruno Le Floch, Ilia Smilga.*

Pour un nombre premier p impair, on a d'une part $f(2p) = f(2)f(p)$ et d'autre part $f(p+p) = f(p) + f(p) = 2f(p)$. On en déduit $f(2) = 2$.

Des hypothèses, on déduit :

$$f(12) = f(5) + f(7) = 2f(5) + f(2) = 3f(2) + 2f(3) = 6 + 2f(3)$$

Par ailleurs, $f(12) = f(3)f(4) = f(3)(f(2) + f(2)) = 4f(3)$. Il en résulte $f(3) = 3$.

Pour calculer $f(1999)$, on procède par étapes : on vient de voir que $f(7) = 7$. D'autre part $f(11) + f(3) = f(14) = f(2)f(7)$, d'où $f(11) = 11$. Ensuite, $f(13) = f(11) + f(2) = 13$. Il vient $f(2002) = f(2)f(7)f(11)f(13) = 2002$, puis $f(1999) + f(3) = f(2002) = 2002$, ce qui assure $f(1999) = 1999$ comme demandé.

Solution de l'exercice 33, *proposée par Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois et Irène Marcovici.*

En appliquant l'inégalité à $m = n = 2^j$, on obtient :

$$|f(2^j) - f(2^{j-1})| \leqslant 1$$

En sommant ces inégalités pour j variant de $i + 1$ à k, il vient :

$$|f(2^k) - f(2^i)| \leqslant k - i$$

La majoration de l'énoncé se déduit alors directement en sommant les inégalités précédentes.

Solution de l'exercice 36, *proposée par Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois et Irène Marcovici.*

On a par hypothèse $a(c^2 + b^2) = c(a^2 + b^2)$, d'où $ac(c - a) = b^2(c - a)$. Comme $a \neq c$, il en résulte que $ac = b^2$, et ainsi :

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (2ac - b^2) + c^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + b + c)(a + c - b)$$

On a bien sûr $a + b + c > 1$, donc pour obtenir une factorisation non triviale de $a^2 + b^2 + c^2$, il suffit de vérifier que $a + c - b \neq 1$. Mais d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a, comme $a \neq c$:

$$a + c = 2 \cdot \frac{a + c}{2} > 2\sqrt{ac} = 2b$$

donc $a + c - b > b \geqslant 1$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 41, *proposée par Fathi Ben Aribi.*

La somme des entiers compris entre 1 et A est $\frac{A(A+1)}{2}$. On cherche donc les entiers A pour lesquels il existe $B \in \{0, 1, \ldots, 999\}$ tel que :

$$\frac{A(A+1)}{2} = 1000A + B \quad \text{c'est-à-dire} \quad A^2 - 1999A = 2B$$

Pour $A < 1999$, on a $A^2 - 1999A < 0$ et donc aucun tel A ne convient. Si $A \geqslant 2000$, on a $A^2 - 1999A \geqslant 2000$ et ces A ne conviennent pas plus. Il reste $A = 1999$ pour lequel on vérifie facilement que ça marche.

Solution de l'exercice 42, *proposée par Ilia Smilga.*

La réponse est 10. Voyons dans un premier temps que c'est possible pour $k = 10$: on commence par égaliser les dix premiers verres d'une part, et les dix suivants d'autre part. Ensuite, on égalise l'ensemble formé des verres de 1 à 5 et de 11 à 15, et de même pour celui des verres de 6 à 10 et de 16 à 20. On voit que les vingt premiers sont alors égalisés. On égalise de même les vingt derniers, et on procède ensuite comme on pense — on égalise successivement les ensembles de verres suivants : $\{1, \ldots, 5, 21, \ldots, 25\}$, $\{6, \ldots, 10, 26, \ldots, 30\}$, $\{11, \ldots, 15, 31, \ldots, 35\}$ et $\{16, \ldots, 20, 36, \ldots, 40\}$.

Montrons ensuite que l'égalisation n'est plus possible pour $k < 10$. On considère en effet la configuration où l'un des verres contient une quantité 1 de liquide et où tous les autres sont vides. Après le n-ième transvasement, chaque verre contient une quantité de liquide de la forme a/k^n, a entier. Si l'on arrive à tout égaliser, on doit donc avoir $a/k^n = 1/40$, donc 40 divise k^n. Il en résulte que k doit être multiple de 2 et 5, donc de 10.

Solution de l'exercice 43, *proposée par Kevin Webster.*

Par les diverses symétries, on a $\widehat{ABC_1} = \widehat{ABC} = \widehat{CBA_1}$. L'alignement de A_1, B et C prouve que ces angles font $\pi/3$. D'autre part, $BC = BC_1 = 2BA_1$. D'après la formule d'Al Kashi dans le triangle A_1BC, il vient donc $A_1C = \sqrt{3}A_1B$. On conclut par la réciproque de Pythagore.

Solution de l'exercice 45, *proposée par Laurent Deproit, Pierre Kreitmann, Xavier Ploquin.*

Le point crucial consiste à remarquer la factorisation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - x - y - z = yz + zx + xy - x - y - z = -(x-1)(y-1)(z-1)$$

puisque $xyz = 1$. Pour tout entier k, il est clair que $x^k y^k z^k = 1$ et que $x^k - 1$ est du même signe que $x - 1$ (et de même pour y et z). Le résultat s'en déduit aussitôt.

Solution de l'exercice 50, *proposée par Sunghwa Ro.*

Soit a un entier compris entre 1 et $n-1$. On évalue la somme partielle :

$$S_a = \sum_{k=a^2}^{(a+1)^2-1} \{\sqrt{k}\}$$

On utilise pour cela la majoration, pour $i \leqslant a$:

$$\{\sqrt{a^2+i}\} + \{\sqrt{(a+1)^2-i-1}\} = \sqrt{a^2+i} + \sqrt{(a+1)^2-i-1} - 2a \leqslant 2\sqrt{a^2+a} - 2a = \frac{2a}{\sqrt{a^2+a}+a} < 1$$

la première inégalité résultant de la concavité de la fonction racine carrée. Il ne reste plus qu'à sommer les inégalités ainsi obtenues (et à remarquer que $\{\sqrt{a^2}\} = 0$).

Solution de l'exercice 54, *proposée par Laurent Deproit, Pierre Kreitmann, Xavier Ploquin.*

Soit a la longueur d'un côté de ABC. On a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{APB} + \mathcal{A}_{BPC} + \mathcal{A}_{CPA} = \frac{3a}{2} + \frac{4a}{2} + \frac{5a}{2} = 6a$$

D'autre part $\mathcal{A}_{ABC} = a^2 \cdot \sqrt{3}/4$, d'où $a = 8\sqrt{3}$ puis $\mathcal{A}_{ABC} = 48\sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 55, *proposée par Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois, Bruno Le Floch et Irène Marcovici.*

Soit a, b, c les dimensions du parallélépipède rectangle. La somme des aires des faces vaut $2ab + 2bc + 2ca$, et le volume est abc. Posons alors $A = bc$, $B = ca$ et $C = ab$. Les hypothèses s'écrivent (l'unité de longueur étant le centimètre) :

$$2A + 2B + 2C = 216 \quad \text{soit} \quad \frac{ABC}{3} = 36$$

et :

$$ABC = 216^2 = 6^6 \quad \text{soit} \quad \sqrt[3]{ABC} = 6^2 = 36$$

Or, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $(A+B+C)/3 \geqslant \sqrt[3]{ABC}$ avec égalité si et seulement si $A = B = C$, donc il vient $ab = bc = ca$, d'où $a = b = c$ puisqu'aucune de ces dimensions n'est nulle. Par conséquent, le parallélépipède est nécessairement un carré.

Solution de l'exercice 57, *proposée par Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois et Irène Marcovici.*

Cet exercice est laissé au lecteur...

Solution de l'exercice 58, *proposée par Laura Corman, Elisabeth Golovina-Benois et Irène Marcovici.*

On remarque que $f(0) = 0$ et donc $b = 0$. On est ramené à étudier des équations de degré 2. On trouve finalement à $a \in [0, 4[$.

Solution de l'exercice 62, *proposée par Bruno Le Floch.*

Le polynôme suivant convient : $P(X) = X^{2005} - X + 1$. En effet, s'il existe n, p et k des entiers strictement positifs tel que $P^{\circ k}(n) \equiv 0$ ou $1 \pmod p$, alors $P^{\circ(k+1)}(n) \equiv 1 \pmod p$. Ainsi, si l'un des nombres $P(n)$, $P(P(n))$, etc., est divisible par $p \geqslant 2$, alors aucun des nombres qui le suivent n'est divisible par p. Il en résulte que deux nombres de la liste précédente sont sans facteur commun.

Remarque. Tous les polynômes de la forme $1 + X(X-1)Q$ de degré 2005 conviennent.

Solution de l'exercice 63, *proposée par Irène Marcovici.*

On commence par remarquer que le nombre de zéros à droite dans l'écriture en base 10 de $n!$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Par conséquent, le réel qu'on considère possède des suites arbitrairement longues de zéros dans son développement décimal. Mais par ailleurs il a des chiffres non nuls aussi loin qu'on veut, donc son développement décimal ne peut être périodique. Il est donc nécessairement irrationnel.

Solution de l'exercice 65, *proposée par Laura Corman et Irène Marcovici.*

Une telle fonction n'existe pas. En effet, si c'était le cas, on devrait avoir simultanément $|f(\pi)-2| \leqslant 1$ (en faisant $x=y=\pi/2$) et $|f(\pi)+2| \leqslant 1$ (en faisant $x=3\pi/2$ et $y=-\pi/2$), ce qui n'est clairement pas possible.

Solution de l'exercice 67, *proposée par Ilia Smilga.*

Appelons Δ le discriminant commun. Les polynômes s'écrivent alors : $P_i = X^2 + a_iX + (a_i^2 - \Delta)/4$. Les hypothèses expriment que les $P_i + P_j$, $i \neq j$ ont un discriminant strictement positif, ce qui donne après calcul :

$$(a_i - a_j)^2 < 4\Delta$$

Ainsi, $\Delta > 0$, et si l'on note δ sa racine carrée, tous les a_i appartiennent à un intervalle ouvert de diamètre 2δ.

Le problème se reformule alors de la façon suivante : on fixe un intervalle ouvert de diamètre 2δ, on se donne une famille finie $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réels dans cet intervalle et l'on veut prouver que le polynôme :

$$nX^2 + \left(\sum a_i\right)X + \frac{\left(\sum a_i^2\right) - n\delta^2}{4}$$

a un discriminant strictement positif, ou encore :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i - a_j)^2 < n^2\delta^2$$

On peut supposer que $\delta = 1$ et que l'intervalle considéré est $]-1,1[$.

La somme précédente est un polynôme de degré 2 en a_1 strictement convexe. Il atteint donc son maximum en un des bord de l'intervalle. Ainsi, il existe $\varepsilon_1 = \pm 1$ tel que si l'on remplace a_1 par ε_1, la somme augmente strictement. Un raisonnement analogue pour les autres indices ramène à montrer que pour toute famille $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de nombres égaux à ± 1, on a :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2 \leqslant n^2$$

ce qui se récrit :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2 \leqslant 2n^2$$

Notons k le nombre de ε_i égaux à $+1$. La somme précédente vaut alors $4 \cdot 2k(n-k) = 8k(n-k)$. Or :

$$2n^2 - 8k(n-k) = 2 \cdot (n^2 - 4nk + 4k^2) = 2(n-2k)^2 \geqslant 0$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 69, *proposée par Bruno Le Floch.*

Soit n un entier entre 1 et 2000 qui n'est pas une puissance de 2. Voyons qu'alors $10^n + 1$ est composé. En effet, n s'écrit alors mp pour un certain $p > 1$ impair, et alors :

$$10^n + 1 = (10^m)^p + 1 = (10^m + 1)\big((10^m)^{p-1} - (10^m)^{q-2} + \cdots - 10^m + 1\big)$$

Ainsi, les seuls n susceptibles de rendre $10^n + 1$ premier sont les puissances de 2. Il suffit donc de vérifier qu'au moins 99% des entiers inférieurs à 2000 ne sont pas des puissances de 2. Or c'est bien le cas : il y a exactement 11 puissances de 2 entre 1 et 2000 (à savoir $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, ..., $2^{10} = 1024$), et l'on a bien $11 < 2000 \times (1 - 0,99) = 20$.
