Stage olympique de Saint-Malo

Cours – Géométrie

Mercredi 30 juillet 2003

par

Pierre DEHORNOY

Table des matières

1 Les tranformations du plan **2**

1.1 La translation 2

1.2 La symétrie centrale 2

1.3 La rotation 2

1.4 La symétrie axiale 3

1.5 L'homothétie 3

1.6 La similitude directe 3

1.7 Problèmes 3

2 La géométrie du cercle **4**

2.1 Problèmes 8

3 La géométrie du triangle **9**

3.1 Problèmes 15

4 Solution des exercices **16**

La géométrie est un vaste sujet qui occupe une place importante dans les exercices proposés aux Olympiades Internationales, souvent deux exercices sur six. La géométrie telle que nous allons l'étudier ici a pratiquement disparu des programmes de lycée pour laisser place à une géométrie plus analytique, la résolution des exercices passant souvent par l'emploi des nombres complexes. Dans notre cours, nous n'aborderons pas cette partie qui, bien qu'utile et efficace, fait souvent plus appel à de la technique calculatoire qu'à un raisonnement géométrique. Nous nous priverons donc de l'usage d'un quelconque repère.

La difficulté de la géométrie a deux origines : d'une part la difficulté qu'on peut avoir pour *voir* ce qui se passe et parfois même pour tracer une figure correcte, et le très large éventail d'outils et de théorèmes mis à notre disposition. Pour résoudre un problème de géométrie, on donnera deux conseils. Tout d'abord il est important de tracer une bonne figure, pour cela on peut d'abord lire l'énoncé en faisant une figure à main levée pour voir les points introduits et voir comment les disposer, ensuite on trace une grande figure précise à la règle et au compas (sur une demi-page, voire une page entière). D'autre part il est bon de repérer sur la figure, et avant de chercher le problème proprement dit, quelques égalités d'angles, de longueurs qui orienteront le raisonnement.

Nous allons voir succintement trois aspects de la géométrie du plan : tout d'abord nous verrons les différentes transformations du plan pouvant être utiles pour la résolution d'exercices, puis la géométrie du cercle avec deux outils importants à savoir la *chasse aux angles* et la puissance d'un point, et enfin la géométrie du triangle où nous rappellerons un certain nombre de formules utiles et des propriétés de points remarquables.

1 Les tranformations du plan

Commençons par étudier les tranformations qui préservent les distances et les angles.

1.1 La translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, la translation T de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. La composition de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les deux translations. Une translation envoie une droite sur une droite parallèle.

1.2 La symétrie centrale

La symétrie centrale est une autre transformation simple. La symétrie centrale de centre O envoie M sur le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Il s'agit également d'une rotation d'angle π.

La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale. Soit s une symétrie de centre O et s' une symétrie de centre O', alors la tranformation $s' \circ s$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

1.3 La rotation

La rotation de centre O et d'angle α associe à tout point M du plan un point M' tel que $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$ (angle orienté). Attention, si on remplace α par $-\alpha$ on applique la rotation inverse de la rotation voulue. Si $\alpha = 0$, la rotation est l'identité. Si $\alpha = \pi$, c'est une symétrie centrale.

1.4 La symétrie axiale

Pour ne pas la confondre avec la symétrie centrale on l'appelle également réflexion. Soit D une droite, la réflexion d'axe D associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit perpendiculaire à D et que le milieu de $[MM']$ appartiennent à la droite D.

La composée de deux réflexions est une translation si les axes sont parallèles, une rotation sinon. Si α est l'angle entre les axes D et D' des réflexions s et s', alors la composée $s' \circ s$ est une rotation d'angle 2α et dont le centre est le point d'intersection des droites D et D'.

1.5 L'homothétie

L'homothétie est une transformation qui ne conserve pas les distances. L'homothétie de centre O et de rapport λ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Si $\lambda = -1$ on retrouve la symétrie centrale. Une homothétie envoie une droite sur une droite qui lui est parallèle. Les seules droites invariantes sont celles qui passent par le centre de l'homothétie. Une homothétie conserve les angles et multiplie les longueurs par $|\lambda|$. Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur du plan, son image $\overrightarrow{A'B'}$ vérifie $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Une homothétie conserve donc les rapports de longueurs.

La composée de deux homothéties est soit une homothétie dont le rapport est le produit des rapports, soit une translation si le produit des rapports vaut 1.

Les homothéties sont très utiles lors de la résolution d'exercices dans le triangle (voir cercle d'Euler).

1.6 La similitude directe

La similitude directe de centre O, de rapport λ et d'angle α est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport λ et de la rotation de centre O et d'angle α. Cette transformation conserve les angles et multiplie les longueurs par $|\lambda|$.

On peut considérer toutes les transformations précédentes à l'exception de la symétrie centrale comme des similitudes : une translation est une similitude de rapport 1 dont le centre est situé à l'infini, une rotation est une similitude de rapport 1, et une homothétie est une similitude d'angle nul. Alors la composée de deux similitudes directes est une similitude.

L'image d'un triangle par une similitude est un triangle dont les angles sont les mêmes et dans le même ordre autour du triangle. Il y a trois critères pout dire que deux triangles sont semblables : soit montrer que leurs angles sont égaux, soit montrer que le rapport des longueurs des côtés est le même, soit trouver une similitude directe qui envoie les sommets de l'un sur les sommets de l'autre.

1.7 Problèmes

Exercice 1.

Soient Γ un cercle et D une droite donnés, construire une droite parallèle à D coupant le cercle Γ en deux points situés à une distance a donnée.

Exercice 2.

Etant donné un polygone à n côtés on peut considérer les milieux $M_1, \ldots, M_n$ des côtés. Inversement si les points $M_1, \ldots, M_n$ sont donnés, existe-t-il un polygone dont les points

M_k sont les milieux des côtés (étudier les cas $n = 3$ et $n = 4$, pour le cas général, distinguer entre n pair et impair) ?

Exercice 3.
On considère trois droites parallèles D_1, D_2, D_3. Construire un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ tel que les points A_1, A_2, A_3 appartiennent respectivement aux droites D_1, D_2, D_3.

Exercice 4.
Soient Γ et Γ' deux cercles, montrer qu'il existe deux homothéties transformant Γ en Γ'. Que dire si les rayons sont égaux ?

Exercice 5.
Soit ABC un triangle, construire à la règle et au compas un carré dont un sommet appartient au côté AB, un sommet au côté AC et deux sommets adjacents appartiennent au côté BC.

Exercice 6.
Soit ABC un triangle isocèle en A, les points M et N sont pris sur les côtés AB et AC respectivement. Les droites (BN) et (CM) se coupent en P. Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles si et seulement si on a $\widehat{APM} = \widehat{APN}$.

Exercice 7.
Soit $A_1A_2A_3$ un triangle et P_0 un point du plan. On définit $A_s = A_{s-3}$ pour $s \geq 4$. On construit une suite $P_1, P_2, P_3, \ldots$ de telle sorte que P_k soit l'image de P_{k-1} par la rotation de centre A_{k+1} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que si $P_{1986} = P_0$, alors le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Exercice 8.
Etant donnés trois cercles deux à deux disjoints. Tracer les trois points d'intersection des tangentes extérieures communes à chaque paire de cercles. Montrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 9.
Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux cartes carrées de la même région tracées à différentes échelles et posées l'une sur l'autre. On suppose que la plus petite des deux est entièrement à l'intérieur de la grande. Montrer qu'il existe un unique point dont les représentations sur les deux cartes coïncident. En donner une construction à la règle et au compas.

Exercice 10.
Soit ABC un triangle isocèle en A et Γ son cercle circonscrit. On note γ le cercle tangent aux droites AB et AC et tangent à Γ intérieurement. On note P, Q, R les points de contact de γ avec AB, AC, Γ respectivement. Enfin, ω est le centre de γ, J est le milieu de $[PQ]$ et K le milieu de $[BC]$.
Justifier l'égalité $\frac{AK}{AR} = \frac{AJ}{A\omega}$. En déduire que J est le centre du cercle inscrit à ABC.

2 La géométrie du cercle

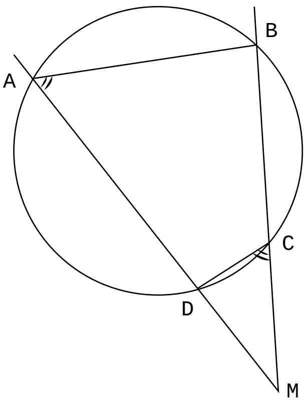
Commençons par une propriété importante des cercles.

Théorème 1

Soient quatre points A, B, M et N. Ces quatre points sont cocycliques si et seulement si on a $(MA, MB) = (NA, NB)$.

Cette propriété se traduit ainsi en termes d'angles de demi-droites : si M et N sont du même côté de la droite (AB), alors les quatre points A, B, M et N sont cocycliques si et seulement si on a $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$, si M et N sont de côtés opposés par rapport à la droite (AB), alors A, B, M et N sont cocycliques si et seulement si on a $\widehat{AMB} = \pi - \widehat{ANB}$. De plus en appelant O le centre du cercle circonscrit à $ABMN$, on a $(OA, OB) = 2(MA, MB) = 2(NA, NB)$.

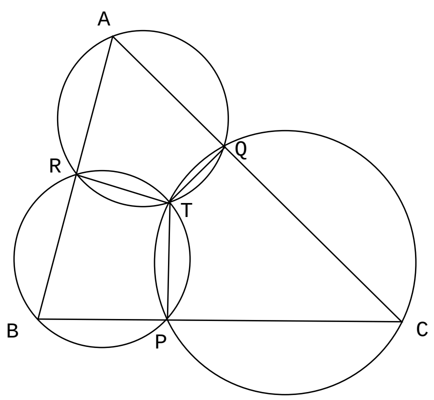
Cette propriété simple permet déjà de faire ce qu'on appelle la chasse aux angles, à savoir chercher sur une figure quels sont les angles égaux, supplémentaires, complémentaires... Nous l'illustrerons avec une propriété des triangles.



Les triangles MAB et MDC sont inversement semblables

Théorème 2 (Miquel)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points situés sur les côtés BC, CA, AB respectivement. Alors les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP passent par un point commun.



Preuve :
► Soit T l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ARQ et BPR. Par colinéarité des points on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{CQT}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TPC} = \pi - \widehat{BPT}.$$

Par cocyclicité on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{BPT}.$$

On déduit $\widehat{TPC} = \pi - \widehat{CGT}$, par conséquent les quatre points C, P, T, Q sont cocycliques, donc T appartient au cercle circonscrit au triangle CQP. ◄

Il est important lorsqu'on calcule des angles de faire attention aux signes et à l'orientation des angles afin de ne pas écrire des choses vraies sur certaines figures mais fausses sur d'autres (voir exercice 17). En général, on écrit les relations qui sont vraies sur la figure qu'on a dessinée, et on vérifie qu'elles restent vraies sur les autres figures, ou au moins que des relations similaires restent vraies.

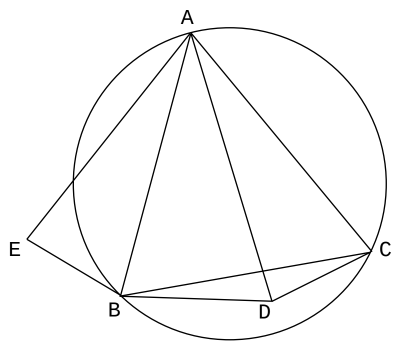
Un autre résultat important sur les cercles et les quadrilatères est le suivant.

Théorème 3 (Ptolémée)

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On a l'inégalité suivante :

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA,$$

avec égalité si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre (ce qui signifie que les droites (AC) et (BD) se coupent à l'intérieur du cercle).



Preuve :
► Soit E l'unique point du plan tel que les triangles ABE et ADC soient directement semblables (c'est-à-dire qu'il existe une similitude directe envoyant ABE sur ADC). On a $EB/CD = AB/AD$, d'où $BE = AB.CD/AD$. D'autre part on a $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$ et $AE/AB = AC/AD$, donc les triangles ACE et ADB sont semblables, d'où $CE = AC.BD/AD$. D'après l'inégalité triangulaire dans le triangle BCE on a $CE \leq CB + BE$ avec égalité si et seulement si les points C, B, E sont alignés dans cet ordre. En remplaçant BE et CE par les valeurs obtenues, on trouve l'inégalité de l'énoncé. L'égalité a lieu si et seulement si on a $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ABE} = \pi - \widehat{ADC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre. ◄

Une autre propriété importante qui découle de la première est ce qu'on appelle la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Théorème 4 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)

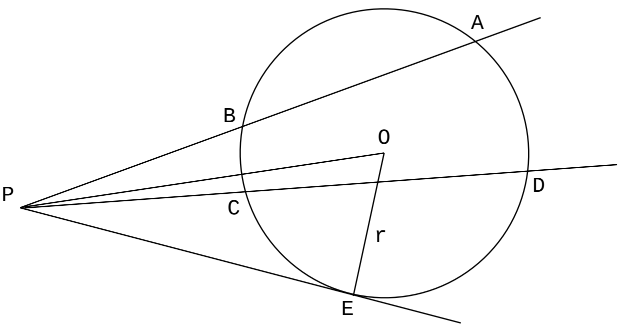
Soit un cercle Γ et un point P. Soit une droite passant par P et coupant le cercle en A et B (éventuellement confondus). Alors le produit $PA.PB$ ne dépend que de P et de Γ, pas de la droite.

<u>*Preuve*</u> :

► Soit une autre droite passant par P et coupant le cercle en C et D (voir figure). On a

$$\widehat{PAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = -\widehat{PDB}.$$

Les triangles PAC et PDB sont donc semblables (et d'orientations opposées), d'où $PA/PD = PC/PB$, soit $PA.PB = PC.PD$. ◄



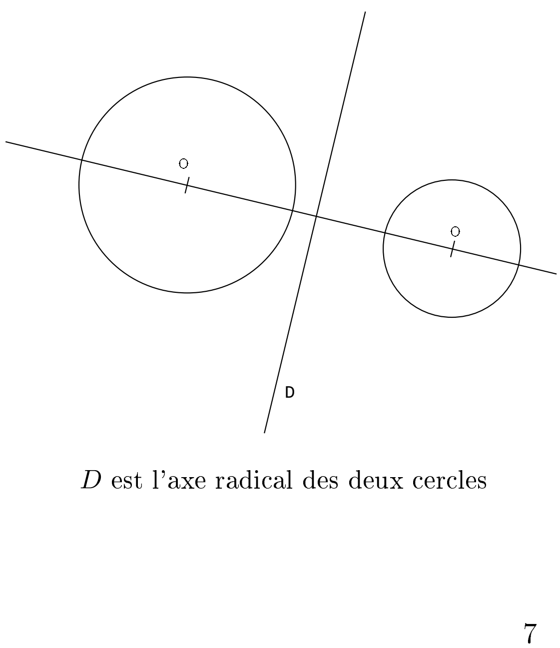
Ici $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2 = OP^2 - r^2$

Le produit $PA.PB$ est appelé *puissance* de P par rapport au cercle Γ. Si O est le centre du cercle et r son rayon, on peut choisir (OP) comme droite et exprimer la puissance de P comme

$$(OP + r)(OP - r) = OP^2 - r^2.$$

En général on utilise des longueurs algébriques, ce qui a pour conséquence que la puissance est positive si P est à l'extérieur de Γ et négative si P est à l'intérieur. Le cas limite $A = B$ correspond au cas où la droite (PA) est tangente au cercle, par le théorème de Pythagore, on retrouve directement la valeur de la puissance en fonction de OP et de r.

La puissance d'un point par rapport à un cercle a une réciproque utile : si les droites (AB) et (CD) se coupent en un point P et qu'on a $PA.PB = PC.PD$ (avec des longueurs algébriques), alors A, B, C et D sont cocycliques.



D est l'axe radical des deux cercles

Soient deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres respectifs O_1 et O_2 de rayons respectifs r_1 et r_2, une question naturelle est de se demander quel est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à ces deux cercles. On sait grâce à notre notre formule explicite qu'il s'agit de l'ensemble des points P vérifiant $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$, soit $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Par le théorème de Pythagore on montre que l'ensemble des tels points P est une droite perpendiculaire à l'axe (O_1O_2) appelé *axe radical* des deux cercles Γ_1 et Γ_2. Si deux cercles se coupent en deux points A

et B, alors leur axe radical est la droite (AB). Si deux cercles sont tangents en un point A, alors leur axe radical est la tangente commune qui les sépare.

On a le théorème suivant sur les axes radicaux.

Théorème 5 (Théorème des axes radicaux)

Soit $\Gamma_1, \Gamma_1, \Gamma_3$ trois cercles. Alors leurs trois axes radicaux Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont soit confondus, soit concourants, soit parallèles.

<u>*Preuve*</u> :

► Un point appartenant à deux axes radicaux au moins a même puissance par rapport aux trois cercles, donc il appartient au troisième axe. Donc soit Δ_1 et Δ_2 sont confondus et le sont donc avec Δ_3, soit ils ont un seul point d'intersection et ils coupent donc Δ_3 en cet unique point, soit ils sont parallèles et Δ_3 leur est donc parallèle. ◄

Un résultat important pour la résolution d'exercices est le suivant : soient $ABCD$ et $CDEF$ deux quadrilatères inscrits dans deux cercles, si les droites (AB), (CD), (EF) sont concourantes alors les quatre points A, B, E et F sont cocycliques.

2.1 Problèmes

Exercice 11.

Soit Γ le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC. Soit M un point de l'arc d'extrémités B et C ne contenant pas A. Montrer qu'on a $AM = BM + CM$.

Exercice 12.

Soit A et B les intersections de deux cercles Γ_1 et Γ_2. Soit CD une corde de Γ_1 et E et F les secondes intersections respectives des droites CA et BD avec Γ_2. Montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 13 (Droite de Simpson).

Soit Γ un cercle et A, B, C trois points de Γ. Soit P un point du plan, P_A, P_B, P_C ses projections sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si P appartient à Γ.

Exercice 14.

Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant aux points A et B. Soit Δ une tangente commune à Γ_1 et Γ_2, C et D les points de contacts de Δ avec Γ_1 et Γ_2. Soit M l'intersection des droites (AB) et (CD), montrer qu'on a $MC = MD$.

Exercice 15.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP se recoupent en Q. Si O, P, Q sont distincts, prouver que (OQ) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 16.

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle et P un point. On définit A_1, B_1, C_1 comme les projections orthogonales de P sur les droites (B_0C_0), (C_0A_0), (A_0B_0). On définit de même les triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$. Montrer que les triangles $A_0B_0C_0$ et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

Exercice 17.

Soit Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 quatre cercles. On suppose que Γ_1 et Γ_2 se coupent en P_1 et Q_1, que Γ_2 et Γ_3 se coupent en P_2 et Q_2, que Γ_3 et Γ_4 se coupent en P_3 et Q_3 et que Γ_4 et Γ_1 se coupent en P_4 et Q_4. Montrer que si les points P_1, P_2, P_3, P_4 sont cocycliques, alors les points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 le sont également.

Exercice 18.

Soit ABC un triangle quelconque et H son orthocentre. Soient deux points M et N pris respectivement sur les côtés AB et AC. Les cercles de diamètres BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que les points P, Q, H sont alignés.

Exercice 19 (OIM 1995).

Soit A, B, C, D quatre points distincts placés dans cet ordre sur une droite. Les cercles de diamètres AC et BD se coupent en X et Y. La droite (XY) coupe (BC) en Z. Soit P un point distinct de Z sur la droite (XY). La droite (CP) coupe le cercle de diamètre AC en C et M, et la droite (BP) coupe le cercle de diamètre BD en B et N. Prouver que les droites AM, DN, XY sont concourantes.

Exercice 20 (Théorème de Pascal).

Soit $ABCDEF$ un hexagone inscrit dans un cercle. Soient G, H, I les intersections respectives des droites (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA). Montrer que les points G, H, I sont alignés. (Pour les plus courageux, montrer le même résultat pour A, B, C, D, E, F sur une conique quelconque !)

3 La géométrie du triangle

Commençons par quelques rappels. On laissera la démonstration des premières formules ou de l'existence des points cités en exercice. On introduira et utilisera les notations usuelles.

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs des côtés opposés aux sommets homonymes et α, β, γ les valeurs des angles. On note G le centre de gravité, point de concours des médianes, le point G divise chaque médiane en deux segments dont le rapport des longueurs vaut 2. On note O le centre du cercle circonscrit, point de concours des médiatrices, H l'orthocentre, point de concours des hauteurs, et I le centre du cercle inscrit, point de concours des bissectrices intérieures. On note p le demi-périmètre, soit $(a+b+c)/2$ et S l'aire du triangle. On note R et r les rayons respectifs des cercles circonscrits et inscrits.

On a les relations suivantes :

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Formule de Héron

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Théorème d'Al Kashi

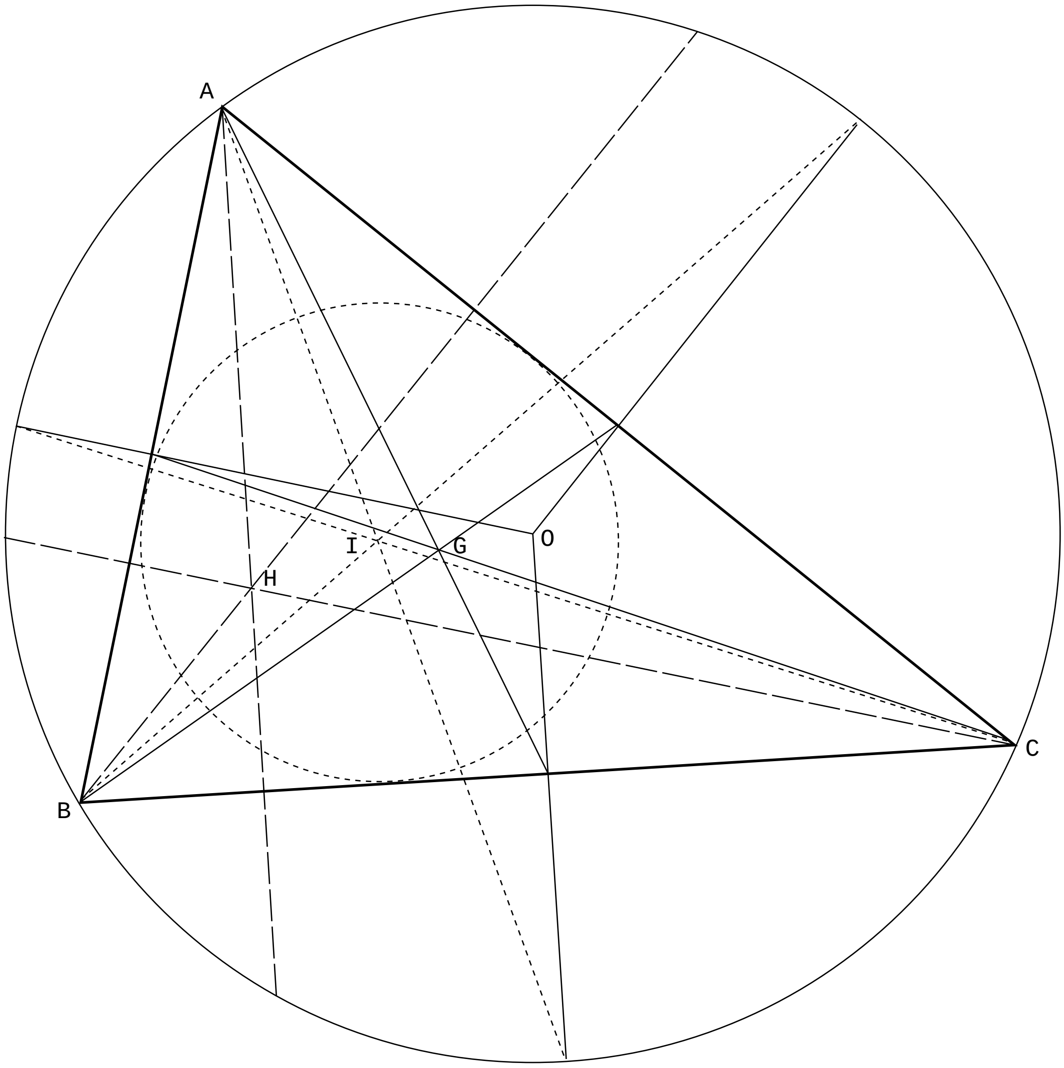
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Formule d'Euler

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Droite d'Euler

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$



Un triangle ABC avec ses quatre points centraux principaux

Voyons maintenant quelques propriétés des points remarquables.

Théorème 6

Soit D le pied de la bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC (c'est-à-dire l'intersection de la bissectrice avec la droite (BC)) et soit E le pied de la bissectrice extérieure issue de A, on a alors l'égalité suivante :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

<u>*Preuve*</u> :

► Exercice. ◄

Théorème 7

Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ de centre O. Soit I le centre du cercle inscrit, M_A la seconde intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec Γ. Alors

1. les droites (M_AO) et (BC) sont perpendiculaires (donc M est le milieu de l'arc BC),

2. le cercle de centre M_A passant par B et C passe également par le point I.

Preuve :

► Exercice ◄

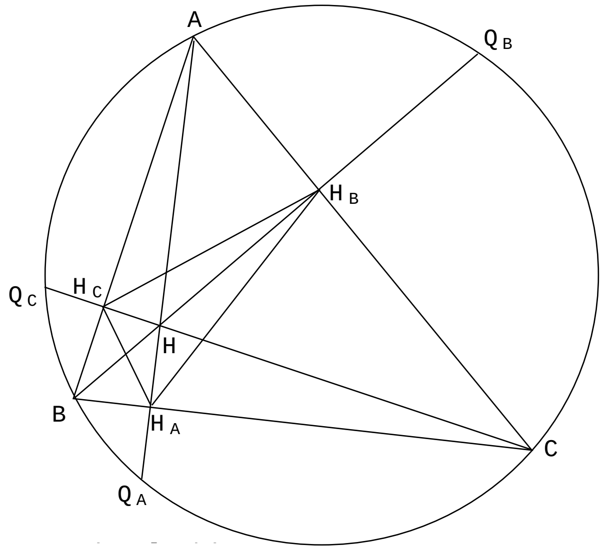
Théorème 8 (Triangle orthique)

Soit H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B, C d'un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), soit H l'orthocentre de ce triangle, on a alors

1. les triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC sont directement semblables entre eux et indirectement semblables au triangle ABC,

2. les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $H_AH_BH_C$, appelé triangle orthique*,*

3. les symétriques de H par rapport aux trois côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit à ABC.

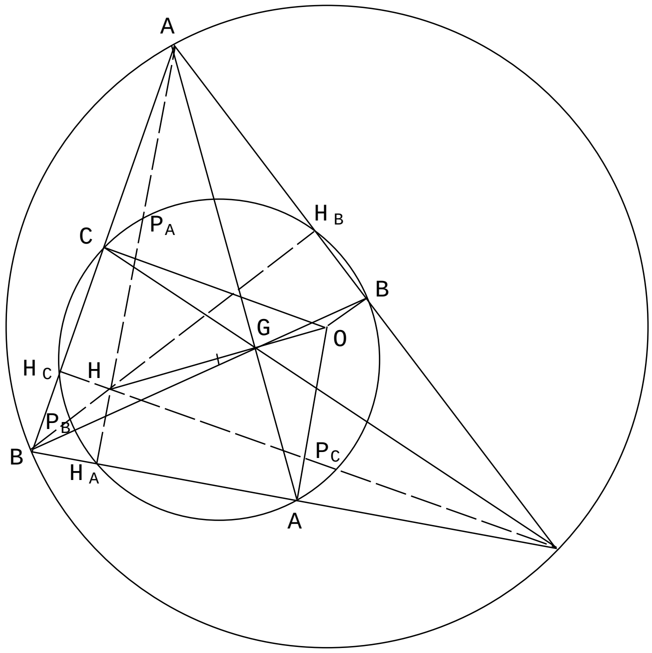


Preuve :

► Exercice ◄

Théorème 9 (Cercle d'Euler)

Soit A', B', C' les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C et P_A, P_B, P_C les milieux respectifs de HA, HB, HC. Alors les neuf *points $A', B', C', H_A, H_B, H_C, P_A, P_B, P_C$ appartiennent à un même cercle appelé* cercle d'Euler, *de centre Ω milieu du segment $[OH]$ et de rayon $R/2$.*



Preuve :

► Soit Ω le milieu de $[OH]$, Γ le cercle de centre Ω et de rayon $R/2$. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Elle envoie O en Ω, donc le cercle circonscrit à ABC sur Γ. Elle envoie A en A', B en B', C en C', donc A', B', C' appartiennent à Γ. Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$, elle envoie O en Ω, donc le cercle circonscrit à ABC sur Γ. Elle envoie A en P_A, B en P_B, C en P_C, donc P_A, P_B, P_C appartiennent à Γ. Soit D_A la droite parallèle à (AH_A) passant par Ω. Elle est perpendiculaire à (BC), donc parallèle à $(A'O)$. Comme Ω est le milieu de $[OG]$, la droite D_A est la médiatrice de $[A'H_A]$, donc on a $\Omega H_A = \Omega A' = R/2$, donc H_A appartient à Γ. On montre de même que H_B et H_C appartiennent à Γ. ◄

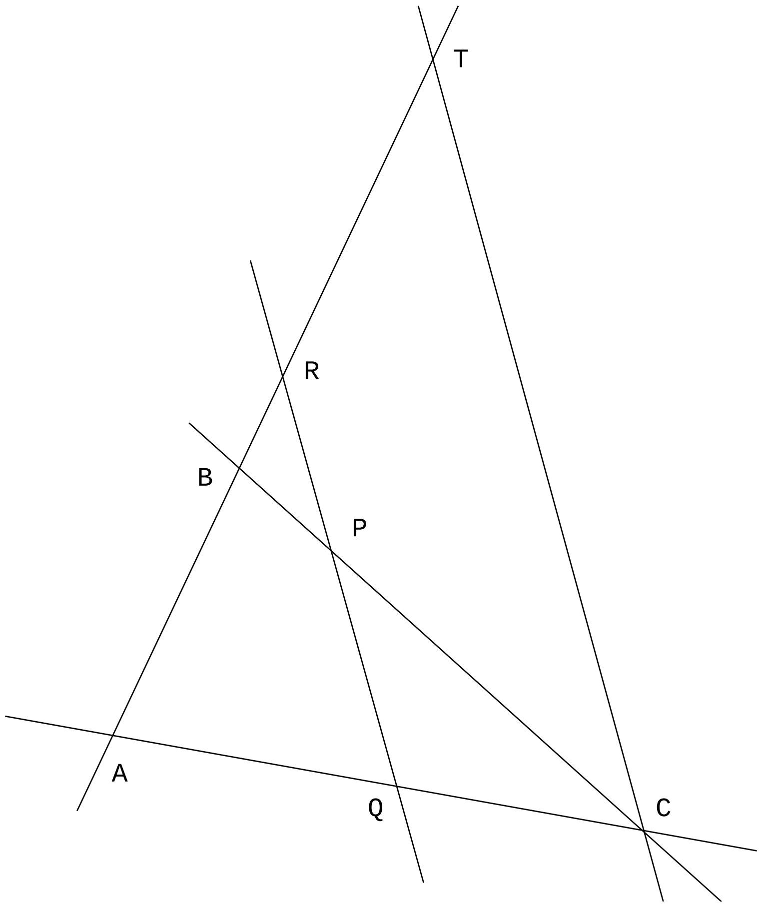
Les deux théorèmes suivants sont très utiles pour montrer que trois points sont alignés ou que trois droites sont concourantes ou parallèles.

Théorème 10 (Ménélaüs)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors les points P, Q, R sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

où les longueurs sont considérées algébriquement.



<u>*Preuve*</u> :
▶ Soit S l'intersection des droites (PQ) et (AB), T l'intersection de la parallèle à (PQ) passant par C et de (AB). Par le théorème de Thalès, on a

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BS}{ST}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{TS}{SA},$$

d'où

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AS}{SB} = \frac{BS}{ST} \cdot \frac{TS}{SA} \cdot \frac{AS}{SB} = -1$$

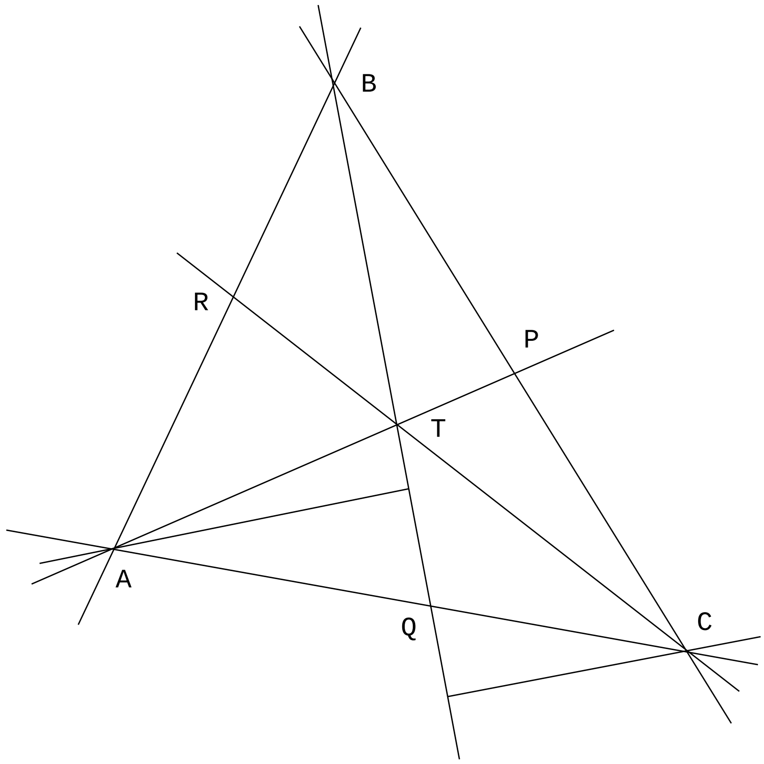
Par conséquent les points P, Q, R sont alignés si et seulement si on a $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SB}$, soit $R = S$.
◀

Théorème 11 (Ceva)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors les droites (AB), (BQ), (CR) sont concourantes si et seulement si on a :

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

où les longueurs sont considérées algébriquement.



Preuve :
▶ Soit T le point d'intersection des droites (AP) et (BQ), soit S le point d'intersection des droites (AT) et (BC). Le rapport des longueurs $\frac{BP}{PC}$ est égal par similitude de triangles au rapport des distances de B et C à la droite (AP), lequel est alors égal au rapport des aires $\frac{[ATB]}{[CTA]}$ (ces triangles ont pour base AT et pour hauteurs les distances de B et C à la droite (AP)). En utilisant le même argument pour les autres rapport, on obtient

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AS}{SB} = \frac{[ATB]}{[CTA]} \cdot \frac{[BTC]}{[ATB]} \cdot \frac{[CTA]}{[BTC]} = 1.$$

On applique alors le même argument que pour la démonstration du théorème de Menelaüs. Les trois droites $(AP), (BQ), (CR)$ concourent si et seulement si on a $R = S$, soit $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SB}$, donc si et seulement si on a

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

◀

Il existe une variante trigonométrique du théorème de Ceva dont la démonstration est similaire.

Théorème 12 (Ceva trigonométrique)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors les droites (AB), (BQ), (CR) sont concourantes si et seulement si on a

$$\frac{\sin \widehat{CAP}}{\sin \widehat{PAB}} \cdot \frac{\sin \widehat{ABQ}}{\sin \widehat{QBC}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCR}}{\sin \widehat{RCA}} = 1.$$

3.1 Problèmes

Exercice 21.
Démontrer les trois théorèmes non démontrés du cours.

Exercice 22.
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 se coupant en A et B, Δ une droite quelconque passant par A. Soient C et D les points d'intersection respectifs de Δ avec Γ_1 et Γ_2. Calculer le rapport BC/BD en fonction uniquement de r_1 et r_2.

Exercice 23.
Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). On suppose que les trois droites AP, BQ, CR se coupent en T, montrer qu'on a alors
$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BQ} + \frac{TR}{CR} = 1.$$

Exercice 24 (Cercle d'Apollonius).
Soit A et B deux points et k un réel différent de 1. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que le rapport AM/BM soit égal à k est un cercle dont le centre appartient à la droite (AB).

Exercice 25 (Points de Nagel et de Gergonne).
Soit ABC un triangle, soient P, Q, R les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA, AB, soit P' le point de contact du cercle exinscrit dans l'angle A au triangle avec le côté BC (le cercle exinscrit dans l'angle A est le cercle tangent aux trois côtés du triangle, mais se situant de l'autre côté de la droite (BC) par rapport au triangle). On définit de même les points Q' et R'.

1) Montrer que les droites $(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes (point de Gergonne).

2) Montrer que les droites $(AP'), (BQ'), (CR')$ sont concourantes (point de Nagel, noté N).

3) Montrer que les points I, G, N sont alignés dans cet ordre et qu'on a $NG = 2.IG$.

4) Soient A', B', C' les milieux des côtés de ABC. Montrer que le centre du cercle inscrit dans $A'B'C'$ est le milieu du segment $[IN]$.

Exercice 26.
Soit ABCD un parallélogramme tel que l'angle A est aigu. Le cercle de diamètre $[AC]$ rencontre les droites (BC) et (CD) en E et F respectivement. La tangente au cercle en A coupe la droite (BD) en P. Montrer que les points P, F, E sont alignés.

Exercice 27.
Soit l une droite passant par l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que les symétriques de l par rapport aux côtés du triangle passent par un même point, montrer que ce point appartient au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 28.
Soit ABC un triangle acutangle, soient L et N les intersections de la bissectrice interne de l'angle A avec (BC) et avec le cercle ciconscrit à ABC. Soient K et M les projections

de L sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que l'aire du quadrilatère $AKNM$ est égale à celle du triangle ABC.

Exercice 29.

Montrer que les symétriques de chaque sommet d'un triangle par rapport au côté opposé sont alignés si et seulement si la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit est égale à son diamètre.

Exercice 30.

Soit ABC un triangle, soit $A'B'C'$ un triangle directement semblable à ABC de telle sorte que A appartienne au côté $B'C'$, B au côté $C'A'$ et C au côté $A'B'$. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, H son orthocentre et H' celui de $A'B'C'$. Montrer qu'on a $OH = OH'$.

4 Solution des exercices

Exercice 1.

Soit $\vec{u}$ le vecteur porté par D, de longueur a (et de sens arbitraire). Soit Γ' l'image de Γ par la translation de vecteur $\vec{u}$. On appelle A et B les intersections de Γ et Γ'. La droite Δ parallèle à D passant par A répond à l'énoncé. En effet la translation de vecteur $-\vec{u}$ envoie le point A sur un point C qui, par construction de A, appartient à Γ et est tel que $AC = a$.

Exercice 2.

Introduisons s_k la symétrie centrale de centre M_k. Si l'on suppose qu'il existe effectivement un polygône $A_1 \dots A_n$ tel que M_k soit le milieu de $A_k A_{k+1}$ (où par convention $A_{n+1} = A_1$), alors s_k va envoyer le point M_k sur le point M_{k+1}.

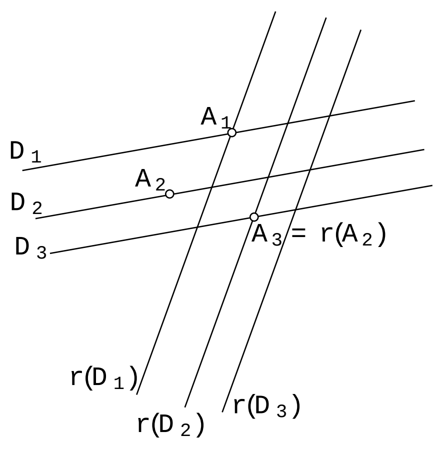
Ainsi M_1 va être un point fixe de la composée $s = s_n \circ \dots \circ s_1$. Calculons donc cette composée. Une symétrie centrale est une rotation d'angle π, la règle de composition des rotations nous dit donc que si n est pair s va être une translation, et si n est impair s sera une symétrie centrale.

Ainsi si s est impair, il va bien exister un point fixé par s, en l'occurrence le centre de la symétrie centrale. On définit maintenant A_1 comme étant ce point, A_2 comme étant l'image de A_1 par s_1, A_3 l'image de A_2 par s_2, et ainsi de suite. À la fin, on retombe bien sur $A_{n+1} = A_1$ et le polygône $A_1 \dots A_n$ est tel qu'on le voulait.

Par contre si n est pair, il n'existe pas forcément un tel point fixe. Plus précisément si s est la translation de vecteur nul, tous les points vont convenir pour A_1 ; on construit ensuite les autres points de même que précédemment. Dans le cas contraire, il n'y aura pas de solutions au problème.

Exercice 3.

Fixons un point A_1 de D_1. Notons r la rotation de centre A_1 et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Pour que $A_1A_2A_3$ soit un triangle équilatéral direct il suffit que $A_3 = r(A_2)$. Or on veut que les points A_2 et A_3 appartiennent respectivement à D_2 et D_3, donc A_3 doit appartenir à l'intersection des droites $r(D_2)$ et D_3. Ces droites se coupent en un unique point, on a donc A_3 et on trouve A_2 en appliquant à A_3 la rotation $-r$.



Exercice 4.

On sait qu'une homothétie de rapport λ multiplie les longueurs par $|\lambda|$. Ici, on veut envoyer un cercle de rayon r_1 sur un cercle de rayon r_2 : le rapport λ devra donc vérifier $|\lambda| = \frac{r_2}{r_1}$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ ou $\lambda = -\frac{r_2}{r_1}$.

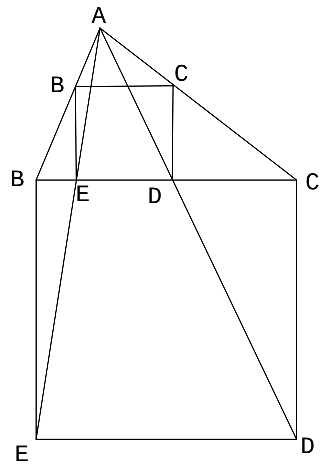
En outre, cette homothétie devra envoyer le centre du premier cercle, disons O_1 sur le centre du second, O_2. Ainsi on doit avoir la relation $\overrightarrow{\Omega O_2} = \lambda \overrightarrow{\Omega O_1}$. Il ne reste plus qu'à construire les deux points que l'on obtient ainsi.

Dans le cas où $r_1 = r_2$, une des deux homothéties précédentes est de rapport 1 et le centre correspondant est rejeté à l'infini. Cette homothétie est en fait une translation...

Au moins dans le cas où les deux cercles ne s'intersectent pas, on remarque que les centres des homothéties correspondent aux points de concours des tangentes communes aux deux cercles.

Exercice 5.

On construit d'abord un carré $BCDE$ extérieurement au côté BC du triangle. Soient D' et E' les intersections de AD et AE avec le côté BC. Soit h l'homothétie de centre A envoyant D en D', elle envoie de même E en E'. Soit $B'C'D'E'$ l'image de $BCDE$ par h. Par construction il s'agit d'un carré. Or les points A, B, B' sont alignés, tout comme les points A, C, C', donc le carré $B'C'D'E$ est le carré voulu.

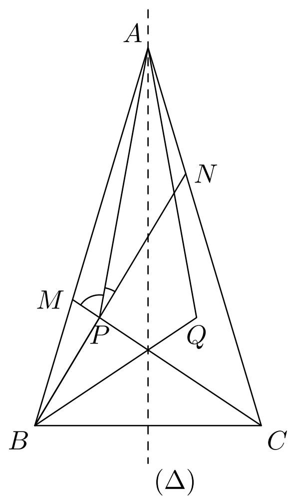


Exercice 6.

Le sens direct est facile : si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors la figure est invariante par rapport à la réflexion d'axe (Δ), Δ étant la hauteur issue de A. On en déduit que le point P appartient à cet axe et que les angles $\widehat{APM}$ et $\widehat{APN}$ sont égaux.

Pour la réciproque, nous allons introduire la réflexion considérée précédemment, celle d'axe (Δ). Appelons-la s. Elle envoie B sur C et P sur un point Q. Les angles $\widehat{MPB}$ et $\widehat{NPC}$ sont égaux car opposés par la sommet ; il en résulte que les angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{APC}$ le sont également. Finalement,on a $\widehat{APB} = \widehat{AQB} = \alpha$.

Mais la somme des trois angles d'un triangle fait π. On en déduit que :



$$\widehat{ABP} + \widehat{BAP} = \widehat{ABQ} + \widehat{QAP} = \pi - \alpha$$

Mais manifestement, dans les conditions de la figure, on a les inégalités $\widehat{ABP} \leqslant \widehat{ABQ}$ et $\widehat{BAP} \leqslant \widehat{QAP}$. La relation précédente prouve que ces inégalités sont en fait des égalités, et ainsi que $P = Q$. Cela permet de conclure.

Exercice 7.

La composée de 2 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$, donc la composée de 3 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et d'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, donc c'est une translation. En particulier la composée des trois rotations successives décrites autour des points A_0, A_1, A_2 est une translation. Soit $\vec{u}$ le vectaur de cette translation, on a alors $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{P_3P_6} = \ldots = \overrightarrow{P_{1983}P_{1986}}$. Donc si $P_0 = P_{1986}$, alors $\vec{u}$ est le vecteur nul, et donc l'image de tout point du plan après les trois premières rotations est ce même point. En particulier pour A_0, après la première rotation il est envoyé en A_0, après la seconde il est envoyé en un certain point B, et après la troisième rotation il retourne en A_0. Comme on a $\widehat{A_0A_1B} = \widehat{BA_2A_0} = \frac{2\pi}{3}$ et $A_0A_1 = A_1B, BA_2 = A_2A_0$, alors les quatre points A_0, A_1, B, A_2 forment un losange dont l'angle en A_1 et A_2 vaut $\frac{2\pi}{3}$, donc l'angle en A_0 vaut $\frac{\pi}{3}$, et le triangle $A_0A_1A_2$ est équilatéral.

Exercice 8.

Appelons par exemple Γ_1, Γ_2 et Γ_3 les trois cercles que l'on a à considérer et r_1, r_2 et r_3 leur rayon respectif. On va supposer en outre que ces trois rayons sont deux à deux distincts afin que les tangentes dont on doit prendre l'intersection aient bien un point commun.

Appelons maintenant A_{12} le point d'intersection des tangentes extérieures à Γ_1 et Γ_2. Et définissions de même A_{23} et A_{31}. On a vu, dans l'exercice 4, que A_{12} était le centre de l'unique homothétie de rapport $\frac{r_2}{r_1}$ qui transformait Γ_1 en Γ_2. Appelons h_{12} cette homothétie et définissons de façon analogue h_{23} et h_{31}.

Ce que l'on a dit précédemment prouve directement que $h_{23} \circ h_{12} = h_{31}^{-1}$. Il s'agit donc en fait de prouver un fait très général : la composée des homothéties de centre A et B qui est encore une homothétie a son centre sur la droite (AB). Mais pour cela, on regarde l'image d'un point M de la droite (AB) ; il est envoyée par la composée sur un point M' appartenant encore à (AB). Ainsi la droite (AB) reste globalement invariante par l'homothétie composée ; cela prouve que le centre de cette homothétie est bien situé sur cette droite.

Exercice 9.

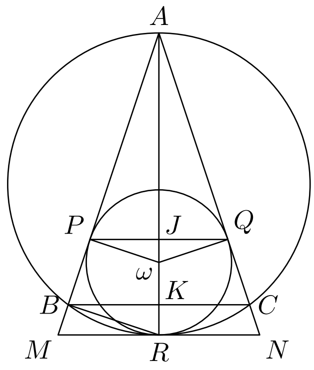
Les deux cartes sont semblables, donc il existe une similitude s envoyant la carte $ABCD$ sur la carte $A'B'C'D'$. Soit O le centre de cette similitude. O est le seul point invariant par s, il est donc le seul point commun entre les deux cartes. Pour le construire, on remarque que l'angle φ de la similitude est l'angle entre les droites (AB) et $(A'B')$; donc O appartient au cercle passant par les points A, A' et par l'intersection des droites (AB) et $(A'B')$ (c'est-à-dire le cercle regardant AA' sous l'angle φ). En faisant de même avec les points B et B', C et C', et D et D', on retrouve O à l'intersection de tous les cercles.

Exercice 10.

On remarque d'abord qu'il y a beaucoup d'angles droits sur la figure. Il y a les angles $\widehat{AP\omega}$, $\widehat{AQ\omega}$, $\widehat{PJA}$ et $\widehat{BKA}$. Mais il y a aussi l'angle $\widehat{RBA}$, le triangle RBA étant inscrit dans un demi-cercle. On utilise alors deux fois le théorème de Thalès qui fournit les égalités :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{A\omega}{AR} = \frac{AJ}{AK}$$

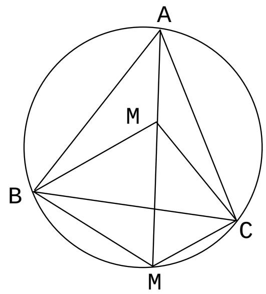
On en déduit directement l'égalité de l'énoncé.



Pour la seconde question, on introduit l'homothétie h de centre A qui envoie K sur R. On note M et N les images respectives de B et de C par h. La droite (MN) est parallèle à (BC) et donc perpendiculaire à (AR). Ainsi le cercle γ est le cercle inscrit du triangle AMN. Par h^{-1} ce cercle se transforme en un cercle de centre J étant donné l'égalité des rapports démontrée précédemment, qui est évidemment le cercle inscrit du triangle ABC.

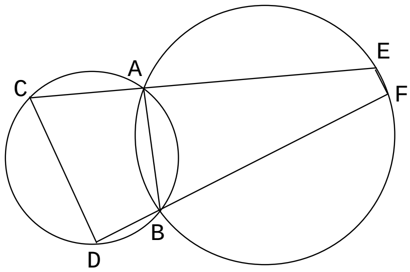
Exercice 11.

Les quatre points B, A, C, M étant cocycliques, on a $\widehat{BMA} = \frac{\pi}{3}$. Soit M' l'image de M par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, cette rotation envoit M sur un point de AM, donc on a $AM = AM' + MM'$. Le triangle BMM' est équilatéral, donc on a $BM = BM' = M'M$. La rotation r envoie C en A, d'où $MC = M'A$, et donc $AM = AM' + MM' = CM + BM$.



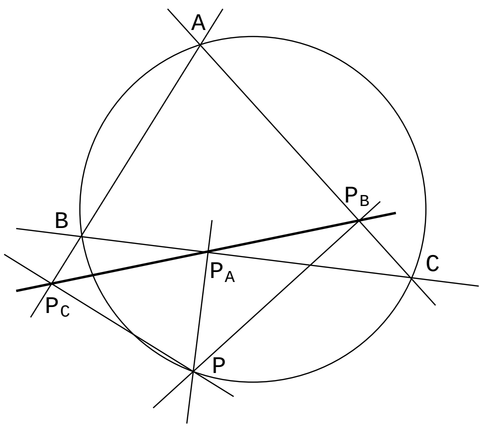
Exercice 12.

On a $\widehat{AEF} = \pi - \widehat{ABF} = \widehat{ABD} = \pi - \widehat{ACD}$, donc les droites (CD) et (EF) sont parallèles.



Exercice 13.

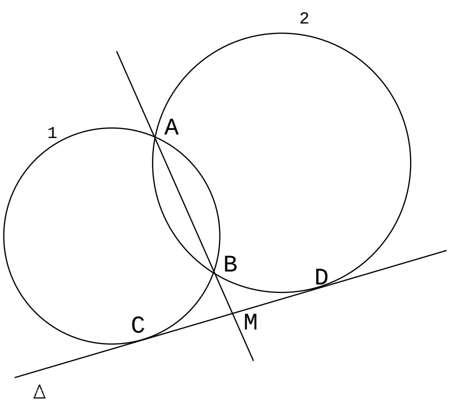
On traitera le cas où les points sont dans la configuration de la figure, les autres se traitent de façon similaire.



Les points P, P_A, B, P_C d'une part, P, A, P_B, P_C d'autre part sont cocycliques, d'où $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PBP_A} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PP_CP_B} = \widehat{PAP_B} = \widehat{PAC}$. Or les points P, Q, R sont alignés si et seulement si $\widehat{P_AP_CP_B} = 0$, soit $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PP_CP_B}$, donc si et seulement si $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, P sont cocycliques.

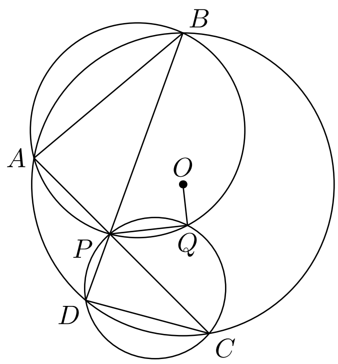
Exercice 14.

La puissance de M par rapport à Γ_1 s'écrit $MC^2 = MA.MB$, celle de M par rapport à Γ_2 s'écrit $MD^2 = MA.MB$, donc on a $MC^2 = MD^2$, donc M est le milieu de $[CD]$.



Exercice 15.

On a $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{PQD} = \widehat{ABP} + \widehat{ACD} = 2\widehat{ABP} = \widehat{AOD}$. Par conséquent les points A, O, Q, D sont cocycliques, d'où $\widehat{OQP} = \widehat{OQA} + \widehat{AQP} = \widehat{ODA} + \widehat{ABD} = \widehat{ODA} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2}$ car le triangle AOD est isocèle en O, d'où la conclusion.



Exercice 16.

Pour que les angles ne dépendent pas de la position du point P, on considèrera des angles orientés de droites.

Le point P étant projeté orthogonalement sur les côtés du triangle $A_0B_0C_0$, les points A_0, B_1, P, C_1 sont cocycliques. On a donc :

$$(A_0B_1, A_0C_1) = (A_0B_1, A_0P) + (A_0P, A_0C_1) = (C_1B_1, C_1P) + (B_1P, B_1C_1)$$

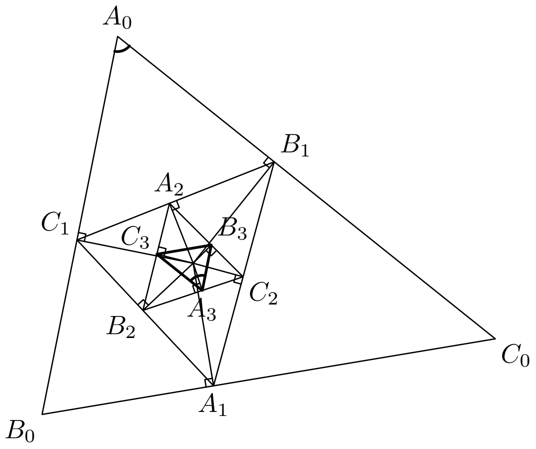
Par cocyclicité des points A_2, B_1, C_2, P et des points A_2, C_1, B_2, P, on a :

$$(C_1B_1, C_1P) + (B_1P, B_1C_1) = (B_2A_2, B_2P) + (C_2P, C_2A_2)$$

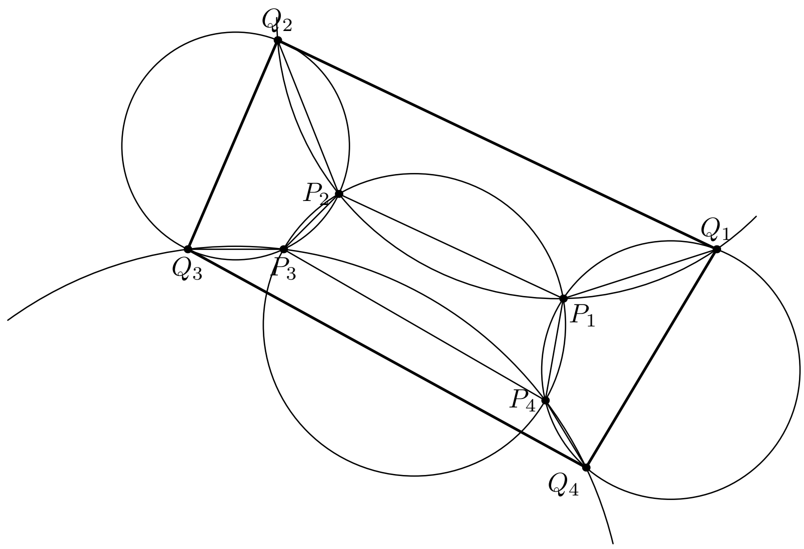
Par cocyclicité des points A_3, C_2, B_3, P et des points A_3, B_2, C_3, P, on a :

$$(B_2A_2, B_2P) + (C_2P, C_2A_2) = (A_3C_3, A_3P) + (A_3P, A_3B_3) = (A_3C_3, A_3B_3)$$

En faisant de même avec les angles (B_0C_1, B_0A_1) et (C_0A_1, C_0B_1), on en déduit que les angles des triangles $A_0B_0C_0$ et $A_3B_3C_3$ sont égaux. Par conséquent, les triangles sont semblables.



Exercice 17.
Commençons par faire un dessin :



Utilisons des angles orientés de droites pour que nos relations ne dépendent pas de l'ordre des points sur les cercles, donc de la figure.

Par cocyclicité, on a :

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2, Q_1Q_4) &= (Q_1Q_2, Q_1P_1) + (Q_1P_1, Q_1Q_4) = (P_2Q_2, P_2P_1) + (P_4P_1, P_4Q_4) \\ &= (P_2Q_2, P_2P_3) + (P_2P_3, P_2P_1) + (P_4P_1, P_4P_3) + (P_4P_3, P_4Q_4)\end{aligned}$$

Or si les points P_1, P_2, P_3, P_4 sont cocycliques, on a :

$$(P_2P_3, P_2P_1) + (P_4P_1, P_4P_3) = 0$$

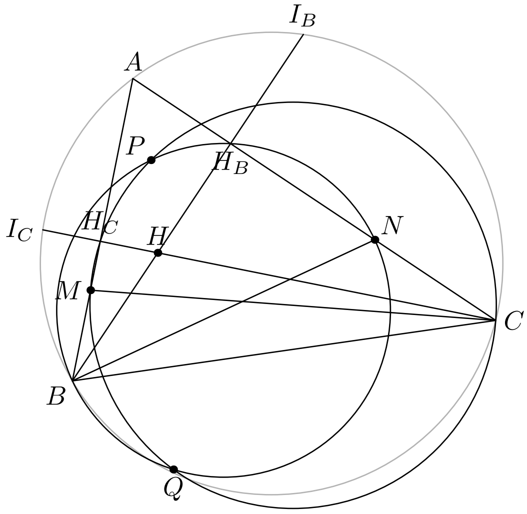
d'où :

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2, Q_1Q_4) &= (P_2Q_2, P_2P_3) + (P_4P_3, P_4Q_4) \\ &= (Q_3Q_2, Q_3P_3) + (Q_3P_3, Q_3Q_4) = (Q_3Q_2, Q_3Q_4)\end{aligned}$$

Par conséquent, les quatre points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont cocycliques.

Exercice 18.

Soient H_B et H_C les projetés respectifs de H sur les côtés $[AC]$ et $[AB]$, et I_B et I_C ses symétriques respectifs par rapport à ce même côté. On a $\widehat{BI_CA} = \widehat{BHA} = \pi - \widehat{BCA}$, donc I_C appartient au cercle circonscrit à ABC (en clair sur la figure) tout comme I_B. D'autre part, l'angle $\widehat{MH_CC}$ étant droit, H_C appartient au cercle de diamètre MC. De même H_B est sur le cercle de diamètre BN.



Calculons la puissance de H par rapport aux trois cercles de la figure. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{ABC}(H) &= HC \cdot HI_C = HB \cdot HI_B \\
\mathcal{P}_{CMH_C}(H) &= HC \cdot HH_C \\
\mathcal{P}_{BNH_B}(H) &= HB \cdot HH_B
\end{aligned}$$

Or on a $HI_C = 2HH_C$ et $HI_B = 2HH_B$, d'où $\mathcal{P}_{CMH_C}(H) = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{ABC}(H) = \mathcal{P}_{BNH_B}(H)$.

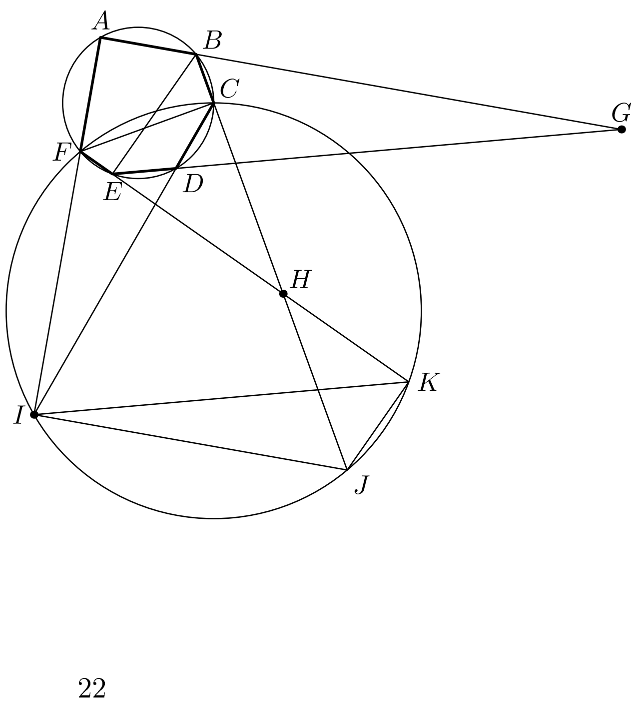
Par conséquent H appartient à l'axe radical des cercles circonscrits à CMH_C et BNH_B, donc à la droite (PQ).

Exercice 19.

En calculant la puissance de P par rapport aux deux cercles on a $PB.PN = PX.PY = PC.PM$. Par conséquent le quadrilatère $MBCN$ est inscriptible, d'où $\widehat{MNB} = \widehat{MCB}$. Les triangles MAC et BND sont droits, on a donc $\widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MCA} = \pi - \widehat{MND}$. Par conséquent le quadrilatère $AMND$ est inscriptible. Les droites $(XY), (AM), (DN)$ sont les axes radicaux des cercles de diamètres AC, BD, et du cercle circonscrit à $AMND$, donc elles sont concourrantes.

Exercice 20.

Soient Γ_1 le cercle circonscrit à l'hexagone et Γ_2 le triangle circonscrit au triangle CFI. La droite (CF) étant la corde commune à ces deux cercles, d'après l'exercice 12, les droites (JK) et (BE) sont parallèles, ainsi que les droites (JI) et (BG) et que les droites (KI) et (GE). Par conséquent, les triangles GBE et IJK sont semblables : il existe une similitude envoyant l'un sur l'autre. Le centre de cette similitude appartient aux deux droites (BJ) et (EK). Par conséquent, il s'agit du point H qui appartient donc également à la droite (GI).



Exercice 21.

Théorème 6.

Le point D appartenant à la bissectrice de l'angle A, il est équidistant des côtés AB et AC, donc le rapport des aires des triangles vaut $\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{AB}{AC}$, d'autre part le rapport des aires des triangles vaut $\frac{DB}{DC}$ puisque la hauteur issue de A leur est commune. On montre l'égalité avec le rapport $\frac{EB}{EC}$ de la même manière.

Théorème 7.

Comme on a $\widehat{BAM_A} = \widehat{M_AAC}$, les arcs BM_A et M_AC sont égaux donc M_A est le milieu de l'arc BC. Par conséquent la droite (OM_A) est la médiatrice du côté BC, donc elle lui est perpendiculaire.

Soit α la valeur de l'angle A et β celle de l'angle B, on a $\widehat{BIM_A} = \widehat{BAM_A} + \widehat{ABI} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. D'autre part on a $\widehat{IBM_A} = \widehat{IBC} + \widehat{CBM_A} = \widehat{IBC} + \widehat{CAI} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Donc le triangle BIM_A est isocèle en M_A et par conséquent on a $IM_A = BM_A$ En faisant de même avec le triangle CIM_A on en déduit que les trois points B, C, I appartiennent à un même cercle de centre M_A.

Théorème 8.

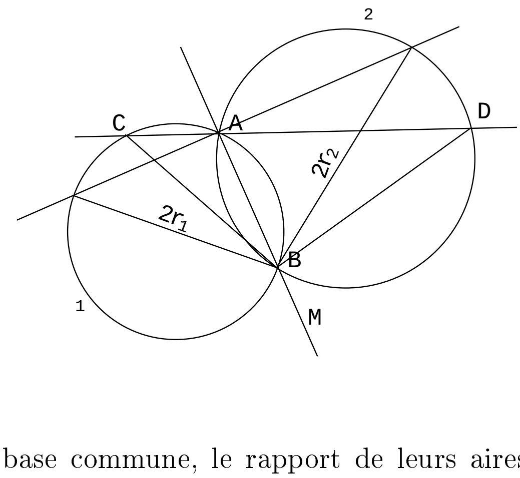
Les angles $\widehat{BH_CC}$ et $\widehat{BH_BC}$ étant droits les points B, H_B, H_C, C sont coycliques, d'où $\widehat{AH_CH_B} = \pi - \widehat{BH_CH_B} = \widehat{ACB}$, de même on montre $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{ABC}$, et par conséquent les triangles BAC ont leurs trois angles égaux et sont donc indirectement semblables (voir figure dans le cours). On montre la similitude avec les autres triangles de même.

Comme on a $\widehat{BH_AH_C} = \widehat{BAC} = \widehat{CH_AH_B}$, la droite (BC) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{H_BH_AH_C}$ et donc la droite (HA) qui lui est perpendiculaire sa bissectrice intérieure.

Soit Q_A, Q_B, Q_C les symétriques de H par rapport aux trois côtés du triangle. On a $\widehat{BQ_AC} = \widehat{BHC} = \widehat{HH_CB} + \widehat{HBH_C} = \widehat{AH_BB} + \widehat{H_BBA} = \pi - \widehat{BAC}$, par conséquent le point Q_A appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. On montre le même résultat pour les points Q_B et Q_C.

Exercice 22.

On a $BC = 2r_1 \sin \widehat{BAC}$ et $BD = 2r_2 \sin \widehat{BAD}$. Or on a $\widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \pi$, d'où $\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{BAD}$ et donc $\frac{BC}{BD} = \frac{r_1}{r_2}$.



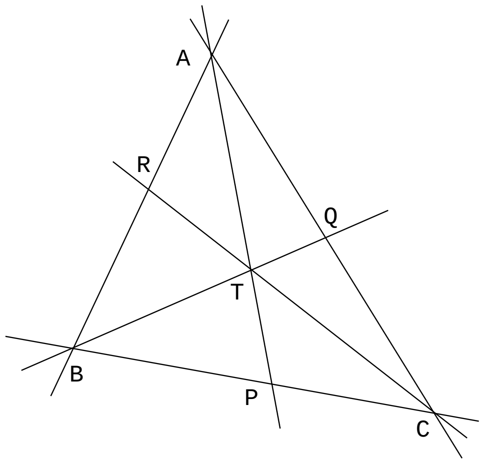
Exercice 23.

Les triangles BCT et BCA ayant une base commune, le rapport de leurs aires est proportionnel au rapport de leurs hauteurs. On a donc

$$\frac{[BCT]}{[BCA]} = \frac{TP \sin \widehat{TPB}}{AP \sin \widehat{APB}} = \frac{TP}{AP}.$$

En faisant de même avec les trois triangles BCT, CAT, ABT dont la somme des aires vaut celle de ABC on obtient :

$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BQ} + \frac{TR}{CR} = \frac{[BCT]}{[BCA]} + \frac{[CAT]}{[CAB]} + \frac{[ABT]}{[ABC]} = 1.$$

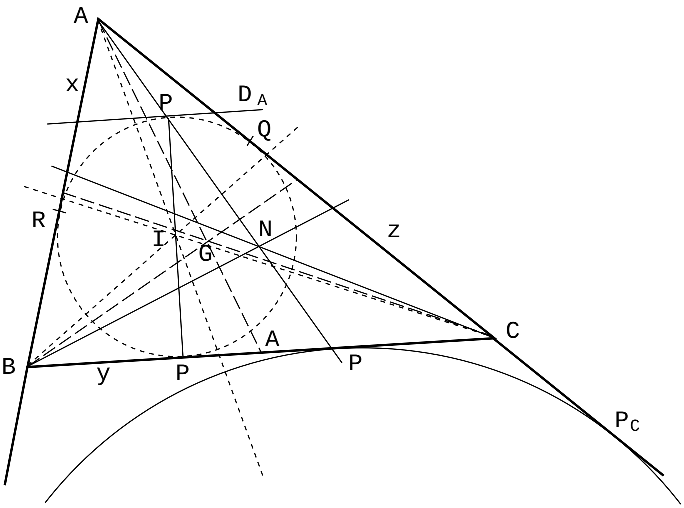


Exercice 24.

Sur la droite (AB) il y a deux points satisfaisant la condition. En effet leur coordonnées barycentriques sont respectivent $(A, k; B, 1)$ et $(A, -k; B, 1)$. Soit D et E ces points. Soit M un point satisfaisant $\frac{MA}{MB} = k$, comme $\frac{MA}{MB} = \frac{DA}{DB}$ et que D appartient au segment $[AB]$ on en déduit que MD est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AMB}$. De même on déduit que ME est la bissectrice extérieure de ce même angle. Par conséquent les droites (MD) et (ME) sont perpendiculaires et donc M appartient au cercle de diamètre DE.

Exercice 25.

Commençons par faire une figure :



1) Posons $x = AQ = AR, y = BR = BP, z = CP = CQ$. On a alors $\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB} = \frac{y}{z}\frac{z}{x}\frac{x}{y} = 1$. Par le théorème de Ceva on en déduit l'existence du point de Gergonne.

Calculons x, y, z qui sont des longueurs importantes pour la suite de l'exercice, et en général dans beaucoup d'exercices. On a $AB + BC = y + x + x + z$ et $BC = y + z$, d'où $x = \frac{AB+AC-BC}{2}$. De même on calcule $y = \frac{AB+BC-AC}{2}$ et $z = \frac{-AB+BC+CA}{2}$.

2) Montrons qu'on a $CP' = BP$, ce qui suffira pour utiliser le théorème de Ceva de la même manière que précédemment. Soit P_B, P_C les points de contact du cercle exinscrit dans l'angle A avec les côtés (prolongés) AB, AC. On a $BP_B = BP'$ et $CP_C = CP'$, d'où $BP_B + CP_C = BC$. Or on a $AP_B = AP_C$ et $AP_B + AP_C = AB + BC + CA$, d'où $CP' = \frac{AB+BC+CA}{2} - AB = \frac{-AB+BC+CA}{2} = BP$.

3) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2. Par h, les milieux A', B', C' des côtés du triangle sont envoyés sur les sommets A, B, C. Soit D_A la droite parallèle à (BC) tangente au cercle inscrit en P''. L'homothétie de centre A envoyant D_A sur (BC) envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit, donc P'' sur P' ; et les points A, P'', P' sont alignés. Or on a $PP'' = 2.PI$ et $PP' = 2.PA'$, donc les droites (IA') et $(P''P')$ sont parallèles. L'image par h de la droite (IA') est une droite parallèle passant par A, c'est donc la droite (AP'). L'image de l'intersection des droites $(IA'), (IB'), (IC')$ est donc l'intersection des droites $(AP'), (BQ'), (CR')$, donc c'est le point N. Par conséquent les points I, G, N sont alignés dans cet ordre et on a $NG = 2IG$.

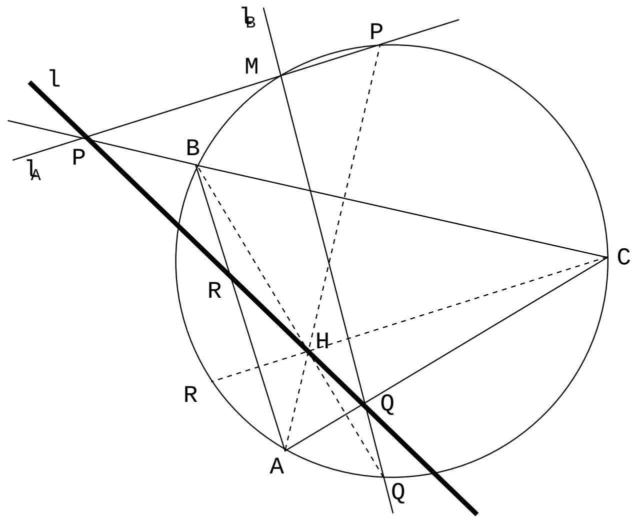
4) L'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ envoie I sur le milieu du segment $[IN]$, or elle envoie ABC sur $A'B'C'$ donc elle envoie le cercle inscrit de l'un sur celui de l'autre, donc le centre du cercle inscrit dans $A'B'C'$ est le milieu de $[IN]$.

Exercice 26.

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle BCD les points P, E, F sont alignés si et seulement si on a $\frac{PB}{PD}\frac{EC}{EB}\frac{FD}{FC} = 1$. Soit α la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$ et β la valeur de l'angle $\widehat{DCA}$. Soient G et H les projetés des points B et D sur AC on a alors $\frac{PB}{PD} = \frac{AG}{AH} = \frac{AB\cos\beta}{AD\cos\alpha}$. D'autre part on a $\frac{EC}{FC} = \frac{2R\cos\alpha}{2R\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme on a $\widehat{EBA} = \widehat{FDA}$ par conséquent les triangles ABE et ADF sont semblables d'où $\frac{BE}{CF} = \frac{BA}{DA}$. Le produit de ces trois rapports vaut donc 1 et les points P, E, F sont alignés.

Exercice 27.

Commençons par faire une figure :



Soit P, Q, R les points d'intersection de la droite l avec les côtés AB, BC, CA du triangle et P', Q', R' les symétriques de H et l_A, l_B, l_C les symétriques de la droite l par rapport à ces même côtés. Soit M l'intersection des droites l_A et l_B. Le triangle $P'Q'R'$ est l'image du triangle orthique de ABC par l'homothétie de centre H et de rapport 2. On a donc $\widehat{Q'P'R'} = \pi - 2\widehat{A}$. D'autre part on a

$$\widehat{Q'MR'} = 2\pi - \widehat{MQ'H} - \widehat{HR'M} - \widehat{Q'HR'},$$

l'angle $\widehat{Q'HR'}$ étant ici l'angle obtu, on a en considérant l'angle aigu

$$\widehat{Q'MR'} = \widehat{Q'HR'} - \widehat{MQ'H} - \widehat{HR'M} = \widehat{Q'HR'} - (\pi - \widehat{Q'HR'}).$$

Or par cocyclicité on a $\widehat{Q'HR'} = \pi - \widehat{A}$, d'où

$$\widehat{Q'MR'} = -\pi + 2.(\pi - \widehat{A}) = \pi - 2\widehat{A} = \widehat{Q'P'R'}.$$

Par conséquent le point M appartient au cercle circonscrit à $P'Q'R'$, il s'agit donc de la seconde intersection de l_A avec ce cercle. On montre qu'il en est de même avec l'intersection des droites l_A et l_C, donc ces trois droites sont concourantes. Or le cercle circonscrit à $P'Q'R'$ est le cercle circonscrit à ABC, donc les trois droites l_A, l_B, l_C se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 28.

Soit K' et M' les projections de N sur AB et AC respectivement. Comme L et N sont sur la bissectrice de $\widehat{A}$, on a $KL = LM$ et $K'N = NM'$. Or on a $BN = CN$ et $\widehat{K'BN} = \widehat{M'CN}$, donc les triangles BNK' et CNM' sont superposables, d'où $BK' = CM'$.

Soit α l'angle moitié de l'angle $\widehat{A}$, on a

$$[ABC] = AB.KL.\sin\alpha + AC.LM \sin\alpha = (AB + AC).KL.\sin\alpha.$$

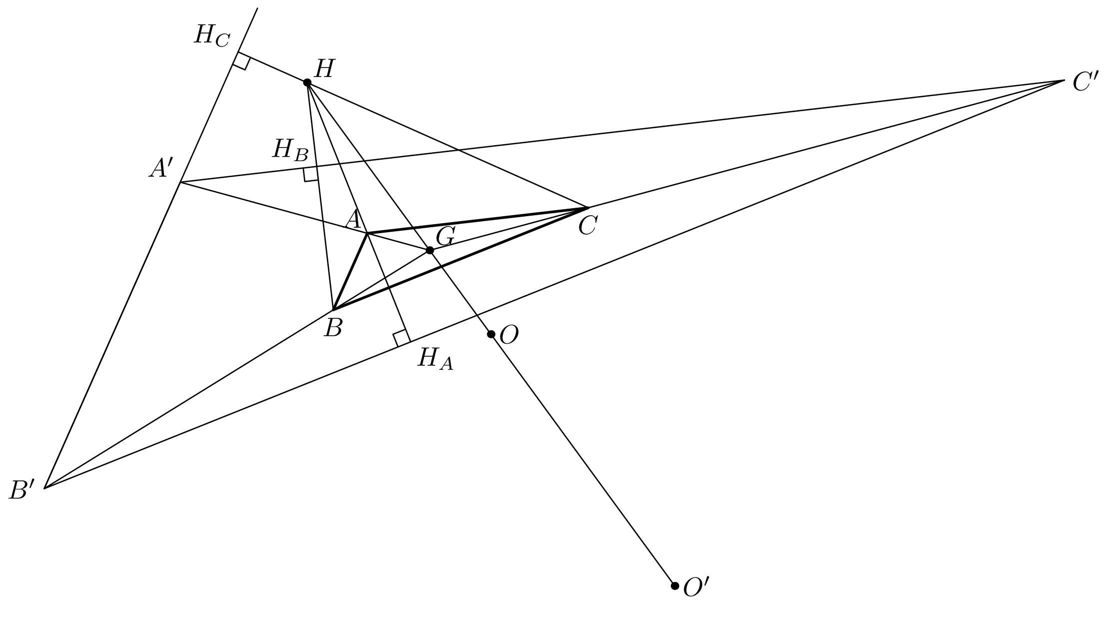
Or on a $AB + AC = AK' + AM'$ d'où

$$[ABC] = (AK' + AM').KL.\sin\alpha = [AKLM] + [KLK'] + [LMM'],$$

d'où par parallélisme de (KL) et $(K'N)$ et de (LM) et (NM')

$$[ABC] = [AKLM] + [KLN] + [LMN] = [AKNM].$$

Exercice 29.



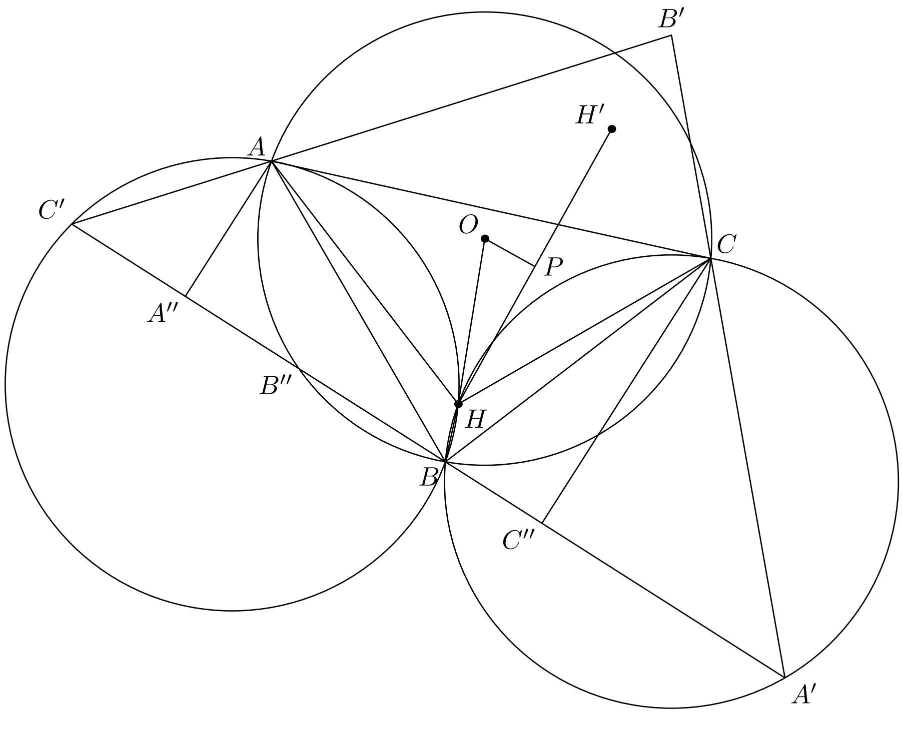
Soit H l'orthocentre du triangle ABC, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit. Soit $A'B'C'$ l'image de ABC par l'homothétie h de centre G et de rapport 4, soient H' et O' les images de H et O par h. Soit H_A, H_B, H_C les projections de H sur les droites $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$.

La distance de G à la droite $(B'C')$ est 4 fois la distance de G à la droite (BC) et la distance de A à (BC) est 3 fois cette distance, par conséquent la distance entre A et (BC) est égale à la distance entre les droites (BC) et $(B'C')$, donc le point H_A est le symétrique du point A par rapport à BC. Il en est de même pour les points H_B et H_C. Par conséquent les points H_A, H_B et H_C sont alignés si et seulement si le point H appartient au cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, donc si et seulement si on a $HO' = R(A'B'C') = 4R(ABC)$ en notant $R(ABC)$ le rayon du cercle circonscrit à ABC.

L'image de la droite d'Euler par h est elle-même car G, centre de h, est dessus. On a donc $HO' = HG + GO' = HG + 4OG = 2OG + 4OG = 6OG = 2OH$. Par conséquent H est sur le cercle circonscrit à $A'B'C'$ si et seulement si on a $OH = 2R(ABC)$ et la preuve est finie.

Exercice 30.

Soit O' le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. Une figure suggère de montrer que les points H et O' sont confondus (bien qu'on ne sache pas encore à quoi cela peut servir). Comme on a $\widehat{BHC} = \pi - \widehat{BAC} = \pi - \widehat{BA'C}$, les points B, H, C, A' sont cocycliques. De plus le rayon du cercle circonscrit à ces points est égal à celui du cercle circonscrit à ABC puisqu'il s'agit du cercle symétrique par rapport à BC. De même les points A, H, B, C' sont cocycliques et le rayon du cercle passant par ces points est égal à celui du cercle passant par B, H, C, A'. D'après l'exercice 22, la corde $A'C'$ étant commune aux deux cercles, on a $HA' = HC'$, de même on montre $HA' = HB'$ et donc H est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$, d'où $H = O'$.



Montrer $OH = OH'$ revient à montrer que le triangle HOH' est isocèle en O. Soit P la projection de O sur HH', cela revient encore à montrer que P est le milieu de HH'. Les triangles ABC et $A'B'C'$ étant semblables, il existe une similitude s envoyant ABC sur $A'B'C'$. Soit k le rapport de s et α son angle. On a $HP = HO\cos\alpha$ et $H'H = H'O' = k.HO$. On cherche donc à montrer la relation $k = 2.\cos\alpha$.

Pour montrer cette relation qui ne dépend que de la construction initiale des triangles, on va complètement oublier les points H, O et H' pour revenir aux seuls côtés des triangles. Soit A'' et C'' les projetés de A et C sur $A'C'$. L'angle entre les droites (AC) et $(A'C')$ valant α, on a $A''C'' = AC\cos\alpha$. Or on a $A'C' = k.AC$, donc il suffit de montrer la relation $2A''C'' = A'C'$.

Soit B'' la seconde intersection du cercle circonscrit à ABC avec la droite $(A'C')$. Par cocyclicité des points A, B, C, B'' on a (voir sur la figure pour la position relative des points) la relation $\widehat{AB''C'} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B''}$, donc le triangle $AB''C'$ est isocèle en A. Par conséquent on a $A''C' = A''B''$ et on montre de même $C''A' = C''B''$. La relation recherchée s'obtient par somme de ces deux dernières égalités.