Analyse I : suites, limites et continuité

Maxime Legrand

ENS - 7 décembre 2013
http ://matholympia.blogspot.fr/

1 Petits rappels sur les quantificateurs

Définition 1. *On introduit (ou rappelle) les* ***quantificateurs*** *suivants :*
- $\exists$ *signifiant "il existe"*
- $\forall$ *signifiant "pour tout"*

Remarque. Généralement, l'introduction d'un élément x par $\exists$ sera suivi de ":" signifiant "tel que", afin de donner des conditions sur cet élément.
Ainsi, $\exists x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1$ signifie "Il existe un élément x de $\mathbb{R}$ tel que x soit strictement compris entre 0 et 1". Cette proposition est évidemment vraie (par exemple pour $x = \frac{1}{\pi}$).

Les *quantificateurs* sont extrêmement importants en logique mathématiques, et il est primordial de savoir parfaitement les manipuler.

Une opération importante sur une proposition logique Q est le passage à la négation $\neg Q$ de Q, qu'il faut savoir manipuler. On remarque alors que les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ sont inter-changés, et les affirmations triviales remplacées par leur contraire.

Ainsi, si l'on pose $Q : \exists x \in \mathbb{R} : \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2, y < x \textit{ et } x < z$,
on aura $\neg Q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \textit{ ou } x \geq z$.

Bien entendu, seule $\neg Q$ est vraie.

Exercice d'application. Comment formuler à l'aide de quantificateurs que deux éléments de $\mathbb{R}$ sont soit égaux, soit comparables au sens strict ? Et le contraire ?

2 Suites réelles, limite de suites

2.1 Suites réelles

Définition 2. *Une* ***suite réelle*** *est une fonction $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note généralement $u_n = u(n)$ l'image d'un élément $n \in \mathbb{N}$, et la suite s'écrit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit qu'une suite est*
- ***constante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$
- ***majorée*** *si* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- ***minorée*** *si* $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- ***bornée*** *si elle est minorée et majorée*
- ***croissante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- ***décroissante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$
- ***monotone*** *si elle est croissante et décroissante*

Remarque. Une suite u est bornée si et seulement si $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Remarque. Une suite peut être définie de façon *exhaustive*, comme $u_n = 2^n$, ou par *récurrence*, par exemple :
- $v_0 = 1$
- $v_{n+1} = 2v_n$.

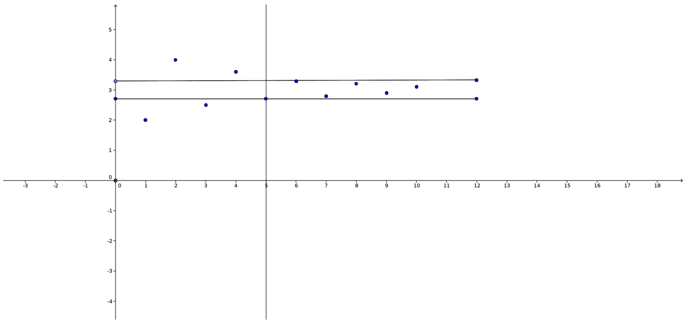
  Ici, les deux définitions nous permettent d'obtenir la même suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2 Limite de suites

Définition 3. *On dit qu'une suite* ***converge vers*** 0 *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| \leq \epsilon.$$

On dit qu'une suite ***converge vers*** $l \in \mathbb{R}$ *si* $u - l = (u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0. l *est alors appelée* ***limite*** *de la suite* u.



Définition 4. *On dit qu'une suite :*
- ***diverge vers*** $+\infty$ *si*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A$$
- ***diverge vers*** $-\infty$ *si*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq A$$

Remarque. On dit qu'une suite u est *convergente* si elle converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$, et *divergente* si $|u|$ diverge vers $+\infty$.
On montre facilement qu'une suite convergente est bornée.

Lemme 1 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}$, *alors* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Théorème 2 (Unicité de la limite)**.** *Soit* u *une suite convergente ou divergeant vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$. *Alors* u *admet une* ***unique*** *limite* $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *notée* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, *ou plus simplement* $\lim u$.

Théorème 3 (Opérations sur les suites)**.** *Soit* u *et* v *deux suites convergeant respectivement vers* l_u *et* l_v. *Alors*
- $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l_u + l_v$
- $u - v = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l_u - l_v$
- $u.v = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l_u l_v$
- *si* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$ *et* $l_v \neq 0$, $\frac{1}{v} = (\frac{1}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et converge vers* $\frac{1}{l_v}$
- *si* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$ *et* $l_v \neq 0$, $\frac{u}{v} = (\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie et converge vers* $\frac{l_u}{l_v}$

Proposition 4 (Stabilité des inégalités larges par passage à la limite)**.** *Soit* u *et* v *deux suites convergeant respectivement vers* l_u *et* l_v, *et telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. *Alors* $l_u \leq l_v$.

Remarque. Attention, si on remplace les $\leq$ par des $<$, la proposition devient FAUSSE. On pourra par exemple prendre $u_n = -2^{-n}$ et $v_n = 2^{-n}$.

Proposition 5. *Soit* u *une suite convergeant vers* $l > 0$. *Alors* $u_n > 0$ *à partir d'un certain rang.*

Corollaire 6. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* u *une suite convergeant vers* $l > a$. *Alors*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > a.$$

Remarque. La propriété ci-dessus est équivalente au même énoncé en remplaçant $u_n > a$ par $u_n \geq a$. (Penser à remplacer a par $\frac{a+l}{2}$)

Exercice d'application. Soit u une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$.
Si u converge vers une limite l, que peut-on dire sur l ?
Montrer que u converge si et seulement si elle stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

2.3 Suites extraites

Définition 5. *On appelle **extraction** une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Remarque. Quelques extractions simples : les fonctions qui, à $n \in \mathbb{N}$ associent n, $2n$, $2n+1$, n^2, 2^n,...

Définition 6. *Soit u une suite réelle. La suite v est dite **extraite** de u si il existe une extraction ϕ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}.$$

Définition 7. *Soit u une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que l est une **valeur d'adhérence** de u s'il existe une suite v extraite de u telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} = l$.*

Définition 8. *Deux suites réelles u et v sont dites **adjacentes** si :*
- *u est croissante et v est décroissante*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - u_n| = 0$.

Définition 9. *Soit A un ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Alors on admet que A admet un plus petit majorant* $\sup A$ *appelé **borne supérieure** de A, ainsi qu'un plus grand minorant* $\inf A$ *appelé **borne inférieure** de A.*

Lemme 7. *Une suite croissante et majorée est convergente, de même qu'une suite décroissante et minorée.*

Remarque. Une suite monotone admet donc toujours une limite, qui est éventuellement infinie (dans le cas où elle n'est pas bornée).

Théorème 8 (Suites adjacentes)**.** *Soit u et v deux suites adjacentes (telles que u soit la suite croissante). Alors :*
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- *u et v convergent vers une même limite l.*

Remarque. La paire de suites $u_n = -2^{-n}$ et $v_n = 2^{-n}$ est un exemple-type de suites adjacentes. Leur limite commune étant évidemment 0.

Exercice d'application. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < b$. On pose :
- u telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$
- v telle que $v_0 = b$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

Montrer que u et v sont monotones. Dans quel sens ?
Montrer que u et v convergent.
Montrer qu'elles ont la même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de u et v.

Lemme 9. *Soit $E = A \cup B$ une réunion d'ensembles tel que $card(E) = +\infty$. Alors $card(A) = +\infty$ ou $card(B) = +\infty$.*

Théorème 10 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Tout suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

Remarque. Mais il peut y en avoir bien plus qu'une ! Par exemple, on peut montrer que tout élément de $[-1; 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(cos(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice d'application. Si une suite bornée n'a qu'une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$, elle converge vers l.

Complément : suites de Cauchy

Définition 10. *Une suite est dite **de Cauchy** si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

Théorème 11 (Complétude de $\mathbb{R}$)**.** *Tout suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy : on dit que $\mathbb{R}$ est **complet**.*

Démonstration. Exercice.
Indications :
- Une suite convergente est évidemment de Cauchy, si pour un certain $\epsilon > 0$, on applique la définition de la convergence pour $\frac{\epsilon}{2}$ et l'inégalité triangulaire.
- Pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente, on pourra commencer par montrer qu'elle admet une valeur d'adhérence (Bolzano-Weierstrass), puis que celle-ci est unique (définition et inégalité triangulaire) avant de conclure.

3 Fonctions réelles, continuité de fonctions

3.1 Limite de fonctions réelles

Définition 11. *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle ($D_f \subset \mathbb{R}$) et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est **définie au voisinage** de a si $\exists h > 0$:*

$$\begin{gathered} D_f \cap [a-h; a+h] \backslash \{a\} = [a-h; a[\text{ ("définie à gauche de a")} \\ \text{ou }]a; a+h] \text{ ("définie à droite de a")} \\ \text{ou } [a-h; a+h] \backslash \{a\} \text{ ("définie autour de a").} \end{gathered}$$

*On dit que f est **définie au voisinage** de $+\infty$ si :*

$$\exists A \in \mathbb{R} : \ [A; +\infty[\subset D_f.$$

*On dit que f est **définie au voisinage** de $-\infty$ si :*

$$\exists A \in \mathbb{R} :]-\infty; A] \subset D_f.$$

Définition 12. *Soit f une fonction réelle, et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** 0 **en** a si f est définie au voisinage de a et que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)| \leq \epsilon$$

*On dit que f **tend vers** $l \in \mathbb{R}$ **en** a si $f - l : x \mapsto f(x) - l$ tend vers 0 en a.*

Théorème 12 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f un fonction réelle définie au voisinage de a.*
Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- *f tend vers l en a*
- *$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} : \lim\limits_{n->+\infty} u_n = a, \ \lim\limits_{n->+\infty} f(u_n) = l.$*

Définition 13. *On dit que f est **continue en** $a \in D_f$ si f tend vers $f(a)$ en a.*
*Si $D_f = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est **continue** si f est continue en tout point de I.*
On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

On ne s'intéressera dans la suite qu'à des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Proposition 13 (Quelques propriétés sur l'ensemble $\mathcal{C}(I)$)**.** *Soit f, g deux fonctions de $\mathcal{C}(I)$. Alors :*
- *$\forall a \in \mathbb{R}, \ a.f : x \mapsto a.f(x)$ est une fonction de $\mathcal{C}(I)$*
- *$f + g : x \mapsto f(x) + f(y)$ est une fonction de $\mathcal{C}(I)$*
- *$f.g \in \mathcal{C}(I)$*
- *si $\forall x \in I, g(x) \neq 0, \ \frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I)$*
- *$|f| \in \mathcal{C}(I)$*

Exercice d'application. Soit f et g deux fonctions continues sur I. Montrer que $\inf(f,g) : x \mapsto \inf(f(x),g(x))$ et $\sup(f,g) : x \mapsto \sup(f(x),g(x))$ sont continues sur I.

Lemme 14. *Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $a,b \in I : a \leq b$.*
Alors si $f(a).f(b) \leq 0$, $\exists c \in [a;b] : f(c) = 0$.

Théorème 15 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $a,b \in I : a \leq b$.*
Alors toute valeur $d \in [f(a);f(b)]$ est atteinte par la fonction f sur $[a;b]$.

Exercice d'application. On dit que f est **injective** si $\forall x,y,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ injective. Montrer que f est monotone.

Complément : fonctions uniformément continues

Définition 14. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.*
*On dit que f est **uniformément continue** sur I si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Remarque. Une fonction uniformément continue est en particulier continue.

Théorème 16 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un segment $I = [a;b]$ est uniformément continue sur I.*

Exercice d'application. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ admettant une limite finie l en $+\infty$ est uniformément continue.

Exercices

Exercice 1 : Moyenne de Cesàro

Soit u une suite réelle, et v la suite définie par $v_n = \frac{u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n}{n+1}$.

a) On suppose dans un premier temps que u tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$, montrer que :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\ldots+u_n}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

b) Montrer que :
$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Longrightarrow \frac{u_1+u_2+\ldots+u_{n_0-1}}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

c) Montrer que v tend vers 0.

d) Montrer que, si u tends vers $l \in \mathbb{R}$, alors v est convergente, et tend vers le même réel l.

e) Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 2 : Fonction continue sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

a) Montrer que l'image $J = f(I)$ de f est un intervalle.

b) Si I est un segment $[a;b]$, montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur I. Autrement dit, $\exists (c,d) \in [a;b]^2 : \forall x \in [a;b],\ m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$.

c) En déduire que, dans ce cas, $f([a;b]) = [m;M]$.

Exercice 3 : Une démonstration alternative du théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On note $\mathsf{limsup}(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{u_k | k \geq n\}$ et $\mathsf{liminf}(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\{u_k | k \geq n\}$.

a) Soit $v_n = \sup\{u_k | k \geq n\}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De même, $(v'_n = \inf\{u_k | k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire la cohérence des définitions de limsup et de liminf

b) Soit A un ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\sup A = -\inf(-A)$ où $(-A) = \{-x | x \in A\}$.
En déduire que $\mathsf{limsup}(-u) = -\mathsf{liminf}(u)$.

c) Montrer que $\mathsf{limsup}(u)$ est une valeur d'adhérence de u.
En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.

d) De même qu'en **c)**, $\mathsf{liminf}(u)$ est une valeur d'adhérence de u.
Montrer que si l est une valeur d'adhérence de u, $\mathsf{liminf}(u) \leq l \leq \mathsf{limsup}(u)$.

Exercice 4 : Définition pas à pas d'une fonction continue

1) Montrer que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et que tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$
a) En vous aidant d'un raisonnement par récurrence, déterminer f sur $\mathbb{Z}$ en fonction de $f(1)$.

b) Après avoir exprimé $f(\frac{1}{q}),\ q \in \mathbb{N}^*$, déterminer f sur $\mathbb{Q}$.

c) Déterminer f sur $\mathbb{R}$.