CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Rappels : dénombrabilité et séries

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Dénombrabilité

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels. Rappelons tout d'abord la notion de dénombrabilité.

Definition 1. Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \to E$.

Ainsi, en notant $x_n = \phi(n)$, on a $E = \{x_n; n \geq 0\}$ (on dit parfois qu'on décrit E en extension). De manière équivalente, on peut aussi écrire $E = \{x'_n; n \geq 1\}$ (en posant $x_{n+1} = x'_n$). On dit parfois aussi qu'on énumère les éléments de E.

Par exemple, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels, est dénombrable. Un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est lui-même dénombrable (car la composée de deux bijections est une bijection).

Nous renvoyons à http://www.math.u-psud.fr/~pansu/websm/denombrabilite.pdf pour des compléments et preuves concernant la dénombrabilité.

2 Séries

Nous rappelons les résultats essentiels sur les séries, qui seront d'usage constant dans l'étude des variables aléatoires sur un espace dénombrable.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique (c'est-à-dire de nombres réels), et $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ sa somme partielle à l'ordre n.

Definition 2. La série $\sum_n u_n$ est dite convergente si S_n converge vers une limite finie S, notée aussi $S = \sum_{n\geq 0} u_n$. C'est la "somme" de la série.

Proposition 3. Si la série $\sum_n u_n$ converge, la *suite* (u_n) tend vers 0.

En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0 comme différence de deux suites convergeant vers la même limite. Attention la réciproque est fausse : on peut avoir $u_n \to 0$ sans que $\sum_n u_n$ converge (prendre par exemple $u_n = 1/n$).

Proposition 4. Cas particulier des termes positifs : si $u_n \geq 0$ pour tout n, la suite S_n est croissante, donc elle tend vers une limite S, toujours appelée la somme de la série. On écrit encore $S = \sum_n u_n$. Ainsi, $S \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Attention : la série converge au sens de la Définition 2 si et seulement $S < \infty$.

Definition 5. La série $\sum_n u_n$ est dite absolument convergence si la série (à termes positifs) $\sum_n |u_n|$ converge.

En général l'ordre dans lequel on considère les termes d'une série est important. Il existe en effet de nombreux exemples de suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et de bijections ϕ de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même pour lesquels $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n u_{\phi(n)}$ diverge (exercice : trouver un tel exemple).

Cela étant, il existe deux cas importants où l'ordre des termes n'a pas d'importance : le cas "positif" et le cas "absolument convergeant" (aussi appelé le cas "sommable").

2.1 Cas des termes positifs

Proposition 6. Si $u_n \geq 0$ pour tout n, la somme $\sum_n u_n$ ne change pas si l'on change l'ordre de sommation. Autrement dit, pour toute bijection $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, on a $\sum_n u_n = \sum_n u_{\phi(n)}$.

Rappelons rapidement la démonstration de cette propriété, qui est fondamentale pour les probabilités : soit ϕ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même, $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ et $S'_n = u_{\phi(1)} + \cdots + u_{\phi(n)}$. Comme les suites (S_n) et (S'_n) sont croissantes, elles convergent et on note S et S' leur limites respectives (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $m(n)$ tel que $\phi(i) \leq m(n)$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (prendre par exemple $m(n) = \max(\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n))$). Alors $S'_n \leq S_{m(n)} \leq S$. En passant à la limite, on obtient $S' \leq S$. On montre de même que $S \leq S'$, et donc $S = S'$.

Ainsi, si on décrète que $\infty + \cdots = \infty$ par convention, si I est un ensemble dénombrable et $(z_i)_{i\in I}$ sont des nombres réels **positifs** ou égaux à $+\infty$, la somme

$$\sum_{i\in I} z_i \tag{1}$$

est **TOUJOURS** bien définie : c'est la somme $\sum_n z_{\phi(n)}$ où $\phi : \mathbb{N} \to I$ est une bijection (la valeur de cette somme ne dépend pas de la bijection choisie). Elle est soit finie, soit vaut $+\infty$.

Proposition 7. Si $u_n \geq 0$, on peut "sommer par paquets". Cela signifie la chose suivante : soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition finie ou dénombrable (c'est-à-dire que I est fini ou dénombrable) de $\mathbb{N}^*$. Pour chaque $i \in I$ on pose $v_i = \sum_{n\in A_i} u_n$. Si A_i est fini, c'est une somme finie ordinaire. Sinon, v_i est elle-même la somme d'une série à termes positifs (ainsi, $v_i \geq 0$ ou $v_i = +\infty$.) On a alors la propriété que

$$\sum_n u_n = \sum_{i\in I} v_I.$$

Cette dernière somme est à interpréter comme (1) lorsque I est dénombrable. Lorsque I est fini, c'est une somme finie ordinaire.

La démonstration de ce résultat est tout-à-fait analogue à celle de la Proposition 6 ci-dessus.

Proposition 8 (Théorème de Fubini positif)**.** On note $U_n = \sum_m a_{m,n}$ et $V_m = \sum_n a_{m,n}$. si $a_{m,n} \geq 0$ ou $a_{m,n} = +\infty$ pour tous m, n alors $\sum_n U_n = \sum_m V_m$. Autrement dit :

$$\sum_n \sum_m a_{m,n} = \sum_m \sum_n a_{m,n}.$$

Cette quantité est soit un nombre réel positif, soit égale à $+\infty$

2.2 Cas absolument convergeant

Proposition 9. Si la série $\sum_n |u_n|$ converge (c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument), alors $\sum_n u_n$ converge.

Proposition 10. Lorsque les u_n sont des réels de signe quelconque et que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, on peut modifier de manière arbitraire l'ordre des termes sans changer la propriété d'être absolument convergente, ni la somme de la série.

Proposition 11. Si la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, la propriété de sommation par paquets de la Proposition 7 est vérifiée.

Ainsi, si I est un ensemble dénombrable et $(z_i)_{i \in I}$ sont des nombres réels, la somme

$$\sum_{i \in I} z_i \tag{2}$$

est bien définie lorsque $\sum_{i \in I} |z_i| < \infty$ (cette dernière somme a toujours un sens par (1) car $|z_i| \geq 0$). Dans ce cas, on a $\sum_{i \in I} z_i = \sum_n z_{\phi(n)}$ pour tout bijection $\phi : \mathbb{N} \to I$ (la valeur de cette somme ne dépend pas de la bijection choisie).

Proposition 12 (Théorème de Fubini sommable)**.** On note $\widehat{U}_n = \sum_m |a_{m,n}|$ et $\widehat{V}_m = \sum_n |a_{m,n}|$. Alors la série $\sum_n \widehat{U}_n$ converge si et seulement si la série $\sum_m \widehat{V}_m$ converge. De plus, lorsque ces séries convergent, les séries $\sum_n U_n$ et $\sum_m V_m$ convergent et $\sum_n U_n = \sum_m V_m$. Autrement dit :

$$\sum_n \sum_m a_{m,n} = \sum_m \sum_n a_{m,n}.$$

Remarque importante : pour voir si les séries $\sum_n \widehat{U}_n$ et $\sum_m \widehat{V}_m$ convergent absolument, on peut sommer les termes $|a_{m,n}|$ dans l'ordre qu'on veut d'après la Proposition 6, car on s'est ramené à des termes positifs.

3 Dénombrabilité : le retour

On utilisera aussi les résultats suivants.

Proposition 13. Soit E un ensemble dénombrable et $A \subset E$ une partie de E. Alors A est fini ou dénombrable.

Proposition 14. Soit I un ensemble fini ou dénombrable, et pour tout $i \in I$ on considère un ensemble fini ou dénombrable A_i. Alors l'ensemble

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

est fini ou dénombrable.

On dit parfois qu'une "union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable".

Proposition 15. Soit $k \geq 1$ un entier et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ on considère un ensemble fini ou dénombrable A_i. Alors l'ensemble

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$$

est fini ou dénombrable.

Attention : un produit infini d'ensembles dénombrables n'est pas forcément dénombrable. On peut démontrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

Par exemple, l'ensemble E des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. En effet, notons E_n l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels de degré n. Comme un polynôme de degré n a $n + 1$ coefficients, E_n est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$, qui est dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables. Alors

$$E = \{0\} \cup \bigcup_{n \geq 0} E_n$$

est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.