CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Loi de Poisson et notations probabilistes

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Loi de Poisson. Soit X une variable aléatoire (définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ceci est bien la loi d'une variable aléatoire, car $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \geq 0$ pour tout $k \geq 0$ et on a

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Notations « probabilistes ». Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire. Si $B \in \mathcal{E}$:

- $\{X \in B\}$ est une *notation* pour l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, qu'on utilise pour simplifier l'écriture.
- $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ par définition de l'image réciproque (et $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire).
- $\mathbb{P}(X \in B)$ est une *notation* pour $\mathbb{P}(\{X \in B\})$, qu'on utilise pour simplifier l'écriture.

Dans le même genre d'idées, si $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{F})$ est une autre variable aléatoire et si $C \in \mathcal{F}$:

- $\mathbb{P}(X \in B, Y \in C)$ et $\mathbb{P}(X \in B \text{ et } Y \in C)$ signifient tous les deux $\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{Y \in C\})$, ou encore $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B \text{ et } Y(\omega) \in C\})$.
- $\mathbb{P}(X \in B \text{ ou } Y \in C)$ signifie $\mathbb{P}(\{X \in B\} \cup \{Y \in C\})$, ou encore $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B \text{ ou } Y(\omega) \in C\})$.

Attention : dans les deux points précédents, X et Y ne doivent pas forcément arriver dans le même espace, mais doivent absolument être définis sur le même espace.