CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Examen partiel – Lundi 21 mars – Durée : 2h

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

On supposera que toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité.

Exercice 1. (Preuves de cours)

(1) Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

(2) Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \alpha^{i+j}(1-\alpha)^2 \qquad i,j \geq 0.$$

(1) Donner la loi de X et la loi de Y.

(2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(3) Déterminer la loi de $X+Y$.

(4) Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=n$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $c > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et reconnaître une loi classique. Quelle est l'espérance de $\min(X,Y)$?

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle à densité. On note F la fonction de répartition de X et f une densité de X. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = e^X$. On note G la fonction de répartition de Y.

(1) Exprimer G en fonction de F.

(2) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et donner une de ses densités (en fonction de f).

Problème

Dans ce problème, X est une variable aléatoire réelle à densité dont une densité f est donnée par $f(x) = 1$ si $x \in [-1/2, 1/2]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Partie I

(1) Calculer $\mathbb{P}(X \leq -1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

(2) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

(3) Les variables X et $-X$ sont-elles de même loi ?

(4) Est-ce que $1/X$ admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}[1/X]$.

(5) Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, $e^{\lambda X}$ admet une espérance, et calculer sa valeur.

Dans la suite du problème, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et toutes de même loi que X. On définit ensuite les variables aléatoires m_n, M_n et S_n comme suit

$$m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Partie II

(6) Est-ce que S_n admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}[S_n]$.

(7) Est-ce que S_n^2 admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}[S_n^2]$.

(8) Donner une formule explicite pour la fonction de répartition de M_n.

(9) Les variables aléatoires m_n et M_n sont-elles indépendantes ?

(10) Calculer $\mathbb{P}(S_n \geq 0)$.

Partie III

(11) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n}\right] = \left(\frac{g(\lambda/2)}{\lambda/2}\right)^n \ .$$

(12) Montrer que, pour tout réel $u \geq 0$, on a $\frac{g(u)}{u} \leq e^{u^2/6}$.

(13) Montrer que, pour tous réels $t, \lambda > 0$, on a $\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\lambda t + n\lambda^2/24}$.
Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

(14) En déduire que, pour tout réel $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-6t^2/n} \ .$$

(15) Montrer que $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}[S_n^2]^{1/2}$.

(16) En déduire que $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{n}$.