CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Feuille d'exercices 6 : Borel-Cantelli et convergences de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1.

(1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de $|U|$.

(2) Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$ (on pourra utiliser le principle de la fonction muette).

(3) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+W}{1-W}\right)$ (on pourra utiliser le principle de la fonction muette).

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}\left[(X+Y)^2\right]$.

Exercice 3. Soit $\alpha>0$. Sur un même espace de probabilité on considère une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n=1)=\frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n=0)=1-\frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Pour quelles valeurs de α la suite $(Z_n, n\geq 1)$ converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 4. Soit $\lambda>0$ et soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}(X\geq a)=a^{-\lambda}$ pour tout $a\geq 1$. Soit $(X_n, n\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, définies sur le même espace de probabilité. On pose

$$T_n=\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}.$$

Montrer que T_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire qu'on déterminera.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

(1) Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)}\max_{1\leq k\leq n} X_k \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \quad \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

(2) On pose $Z_n=\frac{1}{\ln(n)}\max_{1\leq k\leq n} X_k-\frac{1}{\lambda}$. En notant F_n la fonction de repartition de Z_n, montrer que, pour tout réel x, $F_n(x)$ converge vers un réel noté $F(x)$ lorsque $n\to\infty$ et que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Exercice 6. En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

On pourra utiliser le fait que la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer qu'une suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\text{À partir d'un certain rang on a } |X_n - X| \leq 1/p\Big) = 1.$$

Remarque : l'intérêt de cet exercice est de pouvoir montrer la convergence presque sûr avec le "epsilon" en dehors de la probabilité.

(1) Pour tout $p \geq 1$, on pose $A_p = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{|X_k - X| < 1/p\}$. Justifier que

$$\{X_n \text{ converge vers } X\} = \bigcap_{p\geq 1} A_p.$$

(2) Soient $(B_i)_{i\geq 1}$ des événements. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\geq 1} B_i\right) = 1$ si et seulement si $\mathbb{P}(B_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$.

(3) En déduire le résultat.

Exercice 8. Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, telle que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire exponentielle de paramètre n.

(1) Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.