CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Feuille d'exercices 6 : Borel-Cantelli et convergences de variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1.

(1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de $|U|$.

(2) Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$ (on pourra utiliser le principle de la fonction muette).

(3) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+W}{1-W}\right)$ (on pourra utiliser le principle de la fonction muette).

Solution de l'exercice 1

(1) On a $\mathbb{P}(|U| \in [0,1]) = 1$. Si on note $F_{|U|}$ la fonction de répartition de $|U|$, on a donc $F_{|U|}(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $F_{|U|}(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Si $0 < t < 1$, on a

$$\mathbb{P}(|U| \leq t) = \mathbb{P}(-t \leq U \leq t) = \int_{-t}^{t} \frac{1}{2} ds = t$$

car une densité de U est $1/2$ sur $[-1,1]$. Ainsi, $|U|$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue bornée. Comme $f(\sin(U))$ est bornée, elle admet une espérance, et on peut donc utiliser le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left[f(\sin(U))\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin(x))dx.$$

On a envie de faire le changement de variable $u = \sin(x)$, mais attention : sin n'est pas injective sur $[0,\pi]$. On se restreint donc à $[0,\pi/2]$, et en faisant le changement de variable $u = \sin(x)$ (et donc $x = \arcsin(u)$, $dx = du/\sqrt{1-u^2}$) :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{1} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

On en déduit que $\sin(U)$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée au point u par

$$\frac{2}{\pi\sqrt{1-u^2}}\mathbb{1}_{0<u<1}.$$

(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue bornée. Comme $f(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+W}{1-W}\right))$ est bornée, elle admet une espérance, et on peut donc utiliser le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+W}{1-W}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)dx.$$

Comme $(1+x)/(1-x) = 1 + 2x/(1-x)$ et que la fonction $x \mapsto 2x/(1-x)$ est croissante sur $]-1,1[$, la fonction $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ réalise un C^1 difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$; on peut donc faire le changement de variable $u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (et donc $x = (e^{2u}-1)/(e^{2u}+1)$, $dx = \frac{4e^{2u}}{(e^{2u}+1)^2}du$) :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{4e^{2u}}{(e^{2u}+1)^2}du.$$

On en déduit que $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+W}{1-W}\right)$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité au point u est donnée par

$$\frac{2e^{2u}}{(e^{2u}+1)^2}.$$

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}\left[(X+Y)^2\right]$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On remarque que $(X+Y)^2 = X^2+2XY+Y^2$ est la somme de variables aléatoires admettant une espérance (XY admet une espérance comme produit de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance). Par linéarité de l'espérance et en utilisant l'indépendance de X et Y,

$$\mathbb{E}\left[(X+Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + 2\mathbb{E}\left[X\right]Y + \mathbb{E}\left[Y\right]^2 = (\sigma^2+m^2) + (2m^2) + (\sigma^2+m^2) = 2\sigma^2 + 4m^2.$$

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. Sur un même espace de probabilité on considère une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \ \text{ et } \ \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Pour quelles valeurs de α la suite $(Z_n, n \geq 1)$ converge-t-elle presque sûrement ?

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Par définition, $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$ si $\mathbb{E}\left[|Z_n - 0|\right] \to 0$. Or d'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left[|Z_n|\right] = n^{-\alpha} \to 0$.

Pour $\alpha > 1$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n = 1) < \infty$. Donc, d'après le premier lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement l'événement $\{Z_n = 1\}$ n'est pas réalisé à partir d'un certain rang. Donc presque sûrement, on a $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang. Donc presque sûrement $Z_n \to 0$.

Pour $\alpha \leq 1$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n = 1) = \infty$. Comme les variables aléatoires (Z_n) sont indépendantes, les événements $\{Z_n = 1\}$ sont indépendantes. D'après le deuxième lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement l'événement $\{Z_n = 1\}$ est réalisé une infinité de fois. Attention : on ne peut pas en conclure que Z_n ne converge pas presque sûrement (il se pourrait par exemple que $Z_n = 1$ à partir d'un certain rang). En fait, comme $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \infty$, le même raisonnement montre que presque sûrement, $Z_n = 0$ une infinité de fois. Donc presque sûrement, $Z_n = 0$ une infinité de fois et $Z_n = 1$ une infinité de fois. Donc presque sûrement la suite Z_n ne converge pas.

Remarque. Pour $\alpha \leq 1$, on a donc l'exemple d'une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité mais pas presque sûrement.

Exercice 4. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}\left(X \geq a\right) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, définies sur le même espace de probabilité. On pose

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}.$$

Montrer que T_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire qu'on déterminera.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On remarque que $\mathbb{P}\left(X \geq 1\right) = 1$, et que $\mathbb{P}\left(\ln(X) \geq a\right) = e^{-\lambda a}$ pour tout $a \geq 0$. Ainsi, $\ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ. De plus,

$$\ln(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i).$$

D'après le principe de composition, les variables $\ln(X_1), \ldots, \ln(X_n)$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. D'après la loi forte des grands nombres, $\ln(T_n)$ converge donc presque sûrement vers $1/\lambda$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que T_n converge presque sûrement vers $\exp(1/\lambda)$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(1) Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \quad \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

(2) On pose $Z_n = \frac{1}{\ln(n)} \max_{1\le k\le n} X_k - \frac{1}{\lambda}$. En notant F_n la fonction de repartition de Z_n, montrer que, pour tout réel x, $F_n(x)$ converge vers un réel noté $F(x)$ lorsque $n \to \infty$ et que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Solution de l'exercice 5

(1) Par définition de la convergence en probabilité, il s'agit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\le k\le n} X_k - \frac{1}{\lambda}\right| > \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrons d'abord que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\le k\le n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour $\epsilon < 1/\lambda$. Par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\le k\le n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \epsilon\right) = (1-\exp(-(1-\lambda\epsilon)\ln n))^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{n^{\epsilon\lambda}}{n}\right)\right) \to 0.$$

Ensuite, en passant au complémentaire,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\le k\le n} X_k > \frac{1}{\lambda} + \epsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 < (1/\lambda+\epsilon)\ln(n)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)^n.$$

Or

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)^n = 1 - \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{1+\lambda\epsilon}}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) Pour $t \le 0$, on a $\mathbb{P}(Z_n \le t) = 0$. Pour $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z_n \le t) = \mathbb{P}\left(X_1 - \frac{\ln(n)}{\lambda} \le t\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-\lambda t}}.$$

Vérifions que la fonction F définie par $F(t) = 0$ pour $t \le 0$ et $F(t) = e^{-e^{-\lambda t}}$ pour $t > 0$ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

C'est bien une fonction de répartition :

(i) F est à à valeurs dans $[0,1]$ et est croissante,

(ii) F est continue à droite

(iii) $F(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$ et $F(x) \to 1$ quand $x \to \infty$.

Attention, on ne sait *a priori* que F est une fonction de répartition !

C'est bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$ (on vérifie le raccord en 0).

(ii) F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 6. En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

On pourra utiliser le fait que la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Solution de l'exercice 6 On remarque que $e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ est la probabilité qu'une variable aléatoire de Poisson de paramètre n soit inférieure ou égale à n. Notons $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (qui ont donc 1 pour espérance et variance). Ainsi,

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \le n) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}} \le 0\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Z \le 0),$$

où $\sigma = 1$ et Z suit une loi normale centrée réduite. Or $\mathbb{P}(Z \leq 0) = 1/2$, donc la limite cherchée vaut $1/2$.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer qu'une suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\text{À partir d'un certain rang on a } |X_n - X| \leq 1/p\right) = 1.$$

Remarque : l'intérêt de cet exercice est de pouvoir montrer la convergence presque sûr avec le "epsilon" en dehors de la probabilité.

(1) Pour tout $p \geq 1$, on pose $A_p = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{|X_k - X| < 1/p\}$. Justifier que

$$\{X_n \text{ converge vers } X\} = \bigcap_{p \geq 1} A_p.$$

(2) Soient $(B_i)_{i \geq 1}$ des événements. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \geq 1} B_i\right) = 1$ si et seulement si $\mathbb{P}(B_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$.

(3) En déduire le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

(1) Ceci provient du fait que A_p est l'événement « à partir d'un certain rang on a $|X_n - X| \leq 1/p$ » et qu'une suite x_n converge vers x si et seulement si pour tout $p \geq 1$ on a $|x_n - x| \leq 1/p$ à partir d'un certain rang.

(2) Pour le sens direct : si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \geq 1} B_i\right) = 1$, comme $\bigcap_{i \geq 1} B_i \subset B_k$ pour tout k, on a $1 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \geq 1} B_i\right) \leq \mathbb{P}(B_k)$ et donc $\mathbb{P}(B_k) = 1$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(B_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$ on a alors $\mathbb{P}(B_i^c) = 1$ pour tout $i \geq 1$, et en passant au complémentaire :

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i \geq 1} B_i\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i^c\right) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(B_i^c) = 0.$$

(3) D'après (1) et (2), on a $\mathbb{P}(\{X_n \text{ converge vers } X\}) = 1$ si et seulement si, pour tout $p \geq 1$ on a $\mathbb{P}(A_p) = 1$.

Exercice 8. Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, telle que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire exponentielle de paramètre n.

(1) Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

(1) D'après l'exercice 7, il suffit de montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\text{à partir d'un certain rang on a } |Z_n| \leq 1/p) = 1.$$

Soit $p \geq 1$. On a $\mathbb{P}(|Z_n| > 1/p) = e^{-n/p}$. Donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|Z_n| > 1/p) < \infty$. Donc d'après le premier lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement l'événement $\{|Z_n| > 1/p\}$ est réalisé un nombre fini de fois. Donc presque sûrement, à partir d'un certain rang on a $|Z_n| \leq 1/p$. D'où le résultat .

(2) Comme $\mathbb{P}(Z_1 > 0) = 1$, on peut faire comme si $Z_1 > 0$. D'après (1), Z_n converge presque sûrement vers 0. Donc presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$ on a $Z_n < \epsilon$ à partir d'un certain rang. Il suffit donc de choisir $\epsilon = Z_1(\omega)$ pour avoir le résultat désiré.