

Feuille d'exercices 4 : Variables aléatoires réelles à densité

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est donnée par $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $F(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ et $F(x) = 1$ pour $x > 1$. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité, et donner une de ses densités.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité, indépendantes, et dont la fonction de répartition est celle donnée à l'exercice 1. Montrer que $\min(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité, et donner une de ses densités.

Exercice 3. (À connaître) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $c \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle X à densité et dont une densité f_X vérifie $f_X(x) = c$ si $a \leq x \leq b$ et $f_X(x) = 0$ sinon.

- (i) Trouver la valeur de c .
- (ii) Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

Remarque. On dit que X suit la loi uniforme sur le segment $[a, b]$.

Exercice 4. (À connaître) Soit $c > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = ce^{-cx}$ pour $x \geq 0$.

- (i) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X .
- (ii) Montrer que si $a > b > 0$, $\mathbb{P}(X > a | X > b) = \mathbb{P}(X > a)$.

Remarque. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre c .

Exercice 5. Soit X la variable aléatoire de l'exercice 4.

- (i) Est-ce que X admet une espérance? Si oui, la calculer.
- (ii) Est-ce que $1/X$ admet une espérance? Si oui, la calculer.