CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Suite du cours sur les variables aléatoires réelles à densité

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Suite du Chapitre 3 (variables aléatoires réelles), partie 3) (espérance d'une variable aléatoire réelle à densité).

À partir du théorème de transfert, il est possible de démontrer des résultats concernant l'espérance de variables aléatoires réelles qui sont quasiment les mêmes que pour les variables aléatoires réelles discrètes. On admettra ces résultats plus généraux, qui seront démontrés en L3.

Théorème 1 (Propriétés de l'espérance, cas positif). *Soient X, Y des variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$. Alors*

(Linéarité) *Si $\lambda \geq 0$, alors $\mathbb{E}[X + \lambda Y] = \mathbb{E}[X] + \lambda \mathbb{E}[Y]$.*

(Positivité) *On a $\mathbb{E}[X] \geq 0$ et $\mathbb{E}[X] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 0) = 1$.*

(Croissance) *Si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. En particulier, si Y admet une espérance, alors X admet une espérance.*

Corollaire 2. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{P}(|X| \leq |Y|) = 1$. Si Y admet une espérance, alors X admet une espérance.*

Démonstration. Comme $|X|, |Y| \geq 0$, on a $\mathbb{E}[|X|] \leq \mathbb{E}[|Y|]$. Donc si $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. □

Théorème 3 (Propriétés de l'espérance, cas réel). *Soient X, Y des variables aléatoires réelles qui* ***admettent une espérance****. Alors*

(Linéarité) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + \lambda Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}[X + \lambda Y] = \mathbb{E}[X] + \lambda \mathbb{E}[Y]$.*

(Croissance) *Si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.*

(Inégalité $\triangle$) *On a $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.*

Passons maintenant aux liens entre espérance et indépendance. On rappelle que des variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si pour tout $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

En particulier, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

Théorème 4 (Espérance et indépendance)**.** *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. Soient $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sauf sur un nombre fini de points et continues sauf en un nombre fini de points.*

(i) (Cas positif) Si $f_1 \geq 0, \dots, f_n \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}\left[f_1(X_1) \cdots f_n(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f_1(X_1)\right] \cdots \mathbb{E}\left[f_n(X_n)\right].$$

(ii) (Cas réel) Si $\mathbb{E}\left[|f_i(X_i)|\right] < \infty$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\mathbb{E}\left[|f_1(X_1) \cdots f_n(X_n)|\right] < \infty$ et

$$\mathbb{E}\left[f_1(X_1) \cdots f_n(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f_1(X_1)\right] \cdots \mathbb{E}\left[f_n(X_n)\right].$$

À partir de là, en utilisant ces résultats, on démontre des résultats déjà vus pour les variables aléatoires réelles discrètes.

Lemme 5. *Soit X une variable aléatoire réelle et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) = 0$. Alors la variable aléatoire $X\mathbb{1}_A$ admet une espérance et*

$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] =$$

Démonstration.

□

En pratique, on utilise ce lemme pour écrire, lorsque A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ et X est une variable aléatoire réelle positive ou qui admet une espérance, que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right].$$

En effet, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] + \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right]$ d'après le lemme car $\mathbb{P}(A^c) = 0$.

Théorème 6. *(Inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Alors pour tout $\lambda > 0$, on a*
$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[X].$$

Démonstration.

$\square$

Définition 7. *Soit X une variable aléatoire réelle.*

- *On dit que X admet un moment d'ordre p si $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.*
- *On dit que X admet une variance si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et si $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] < \infty$. Dans ce cas, on note*
$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] < \infty.$$
- *Si X admet une espérance, on dit que X est centrée si $\mathbb{E}[X] = 0$.*
- *Si X admet une variance, on dit que X est réduite si $Var(X) = 1$.*

Rappel : $Var(X)$ mesure l'écart quadratique typique de X par rapport à sa moyenne.

Théorème 8. *(Propriétés de la variance) Soit X une variable aléatoire réelle.*

(i) *Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$.*

(ii) *Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, alors X admet une variance.*

(iii) *Si X admet une variance, alors $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ (formule de König-Huygens).*

(iv) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si X admet une variance, alors $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$.*

(v) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si X admet une variance, alors $Var(\lambda + X) = Var(X)$.*

(vi) *Si X admet une variance, alors $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$.*

(vii) *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles (mutuellement) indépendantes telles que $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^2] < +\infty$ et*
$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n).$$

Exemples.

(a) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet une espérance. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires qui ont la même loi que X. Alors

$$\mathbb{E}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] =$$

En effet,

(b) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$ et X une variable aléatoire à densité et bornée. On suppose que U et X sont indépendantes Alors

$$\mathbb{E}\left[UX^2\right] =$$

En effet,

(c) Si X est une variable aléatoire à densité qui admet une espérance alors

$$Var(X) =$$