CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016
Suite du cours sur les variables aléatoires réelles à densité

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Suite du Chapitre 3 (variables aléatoires réelles), partie 2) (variables aléatoires réelles à densité).

Commençons par une petite remarque. Soit X une variable aléatoire réelle à densité. On note F_X sa fonction de répartition. Alors pour tout $x < y$, on a

$$F_X(y) - F_X(x) = \mathbb{P}(x < X \leq y) = \mathbb{P}(x \leq X \leq y).$$

En effet, $F_X(y) - F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(x < X \leq y) = \mathbb{P}(x \leq X \leq y)$. Pour la deuxième égalité, on utilise le fait que $]-\infty, y] \backslash]-\infty, x] =]x, y]$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}_X(]-\infty, y]) - \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) \\ &= \mathbb{P}_X(]-\infty, y] \backslash]-\infty, x]) = \mathbb{P}_X(]x, y]) = \mathbb{P}(x < X \leq y). \end{aligned}$$

et pour la dernière égalité on utilise le fait que $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Théorème 1. *Soit X une variable aléatoire réelle à densité. On note F_X sa fonction de répartition et f_X une de ses densités (en particulier f_X est continue par morceaux). Alors :*

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ converge et

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$.

Démonstration. Pour (1), soient $x_1 < \cdots < x_n$ tels que F_X est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $f_X(x) = F_X'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, et supposons pour simplifier que $x_1 < x < x_2$ (la preuve est similaire dans le cas général). Alors F_X est C^1 sur $]-\infty, x_1[$ et sur $]x_1, x[$. Donc

$$\mathbb{P}(X \leq x_1) = F_X(x_1) = F_X(x_1) - F_X(-\infty) = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(t)dt$$

et d'après la petite remarque

$$\mathbb{P}(x_1 < X \leq x) = F_X(x) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x} f_X(t)dt.$$

En sommant ces deux égalités, on obtient

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(t)dt + \int_{x_1}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

La deuxième assertion provient du fait que

$$1 = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt.$$

□

Ainsi, avec les mêmes notations que pour le théorème, si $a < b$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt, \qquad \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X > a) = \int_{a}^{\infty} f_X(t)dt$$

et

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(t)dt.$$

Remarque 2. *(Interprétation intuitive de la densité). Si F_X est dérivable en x et si $f_X(x) = F_X'(x)$, alors*

$$\frac{\mathbb{P}(x < X < x+h)}{h} = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f_X(x).$$

On écrit cela parfois sous la forme

$$\mathbb{P}(X \in [x, x+dh]) = f_X(x)dh$$

pour dire que la probabilité d'observer X dans un petit intervalle de longueur dh autour de x est proportionnel à dh, la constante de proportionnalité étant $f_X(x)$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur une fonction f pour qu'elle soit une densité.

Théorème 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Les deux conditions (1) et (2) suivantes équivalentes :*

(1) f est une densité d'une variable aléatoire réelle à densité.

(2) f vérifie les trois conditions suivantes :

- *(i) $f \geq 0$*
- *(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
- *(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.*

Idée de preuve. Le fait que (1) implique (2) est un conséquence des résultats précédents. Pour montrer que (2) implique (1). On pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$, et on vérifie que F est croissante, continue à droite, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$. Il existe donc une variable aléatoire à densité X telle que $F_X = F$, et on vérifie que f est une densité de X. □

Remarque. En L3, vous verrez qu'on peut définir des variables aléatoires ayant pour densité f dès que $f \geq 0$ est mesurable et $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Pour cela, il faut définir le sens d'une intégrale d'une fonction mesurable et qui généralise l'intégrale de Riemann des fonctions continues par morceaux : c'est l'intégrale de Lebesgue.