CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016
DS final – Lundi 2 mai – Durée : 2h

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

On supposera que toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité.

Exercice 1. (Preuves de cours)

(1) Énoncer et démontrer le premier lemme de Borel–Cantelli.

(2) Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2. Soit $c > 0$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tous entiers $i, j \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = c\frac{i+j}{i!j!}.$$

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = c \cdot e \cdot \frac{k+1}{k!}.$$

(2) Montrer que $c = \frac{1}{2e^2}$.

(3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

(4) Calculer $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

(5) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $c > 0$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = \max(X, Y)$.

(1) Déterminer la loi de Z et montrer que Z est une variable aléatoire réelle à densité.

(2) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5.

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité qui admettent une espérance et telles que $\mathbb{E}[|X_n|] \to 0$ quand $n \to 0$. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

(2) On suppose que Y_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ et que $\sigma_n^2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montre que Y_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Problème. Le but de ce problème est d'étudier un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

– Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.
– À l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.
– Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

On note T_n le premier temps où un individu occupe le site n.

Partie I. Étude de quelques propriétés de T_n.

(1) Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, où les variables aléatoires $E_1, \ldots, E_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

(2) La variable aléatoire T_n admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

(3) Montrer que T_n/n converge presque sûrement vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Partie II. Quelques propriétés utiles pour la suite.

(4) Soit E une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire e^{xE} admet-elle une espérance ? Calculer $\mathbb{E}\left[e^{xE}\right]$ lorsque e^{xE} admet une espérance.

(5) Calculer $\mathbb{E}\left[e^{xT_n}\right]$ lorsque e^{xE} admet une espérance.

(6) Lorsque $n \to \infty$, montrer que

$$e^{-\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}}\right)^n$$

converge vers un nombre réel strictement positif qu'on determinera.

Partie III. Soit $a > 0$. Le but de cette partie est d'étudier le comportement asymptotique de $\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^a\right)$ lorsque $n \to \infty$.

(7) Dans cette question, on suppose que $a > 1/2$.

(a) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^a\right) \leq e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}}\right)^n.$$

(b) Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^a\right)$ converge.

(c) Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.

(8) Déterminer la limite de $\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^{1/2}\right)$ lorsque $n \to \infty$ (on pourra exprimer la réponse sous la forme d'une intégrale).

(9) On suppose que $a < 1/2$. Calculer la limite de $\mathbb{P}\left(T_n \geq n + n^a\right)$ lorsque $n \to \infty$.