CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Devoir Maison facultatif (pour le lundi 11 avril)

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes toutes de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $n \geq 1$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Quelle est la loi de S_n ?

(2) Quelle est la loi du couple (X_1, S_n) ?

Si U et V sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité et si V est une variable aléatoire discrète, on dit que la loi conditionnelle de U sachant V est la donnée, pour tout $v \in V(\Omega)$ de la loi de U sachant $\{V = v\}$.

Lorsque U et V sont toutes les deux discrètes, on dit pour simplifier que la loi conditionnelle de U sachant V est la donnée des quantités $\mathbb{P}(U = u | V = v)$ pour tous $u \in U(\Omega), v \in V(\Omega)$.

(3) Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n ?

(4) Quelle est la loi conditionnelle de S_n sachant X_1 ?

Exercice 2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre $\lambda > 0$, définies sur le même espace de probabilité. Soit Z la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(X_n/\ln(n), n \geq 1)$. Le but de l'exercice est de montrer que presque sûrement, $Z = 1/\lambda$.

(1) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n/\ln(n) > 1/\lambda + \epsilon) < \infty$.

(2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n/\ln(n) > 1/\lambda) = \infty$.

(3) Conclure.

Problème 1. (Problème des sommes d'Erdős).

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f(n)$ le plus grand entier $k \geq 1$ tel qu'il existe des entiers distincts $x_1, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers (chacun étant utilisé au plus une seule fois) soient toutes différentes (on considère que x_i tout seul est une somme).

Par exemple, $f(4) \geq 3$, car en choisissant $1, 2, 4$, les sommes qu'on peut former sont $1, 2, 4, 1+2, 1+4, 2+4, 1+2+4$ qui sont toutes différentes. Par ailleurs, il est clair que $f(4) \leq 4$ et que $f(4) = 4$ n'est pas possible. En effet, si $f(4) = 4$, on doit choisir les entiers $1, 2, 3, 4$ et les deux sommes $1 + 2 = 3$ sont les mêmes. Ainsi, $f(4) = 3$.

Erdős a conjecturé qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, \qquad f(n) \leq \ln_2(n) + C \qquad (\text{où } \ln_2(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}),$$

et a offert 500 dollars à la première preuve correcte. Cette conjecture n'a pas encore été prouvée (ou réfutée). La meilleure majoration connue à ce jour est de type

$$f(n) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n)) + C.$$

Le but de ce problème est de démontrer que

$$f(n) \leq \ln_2(n) + \ln_2(\ln_2(n)) + C$$

en utilisant des outils probabilistes.

(1) Montrer que $f(n) \geq 1 + \lfloor \ln_2(n) \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).
Indication : on pourra considérer les puissances de 2 inférieures à n.

On fixe maintenant $n \geq 2$ et on considère $x_1, \dots, x_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers soient toutes différentes. On va montrer l'existence de C (indépendant de n) tel que $k \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n)) + C$. Pour cela, on considère des variables aléatoires $B_1, \dots, B_k$ indépendantes de même loi Bernoulli de paramètre 1/2. On pose

$$X = B_1 x_1 + \cdots + B_k x_k.$$

(2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathsf{Var}(X)$ (en fonction de $x_1, \dots, x_k$).

(3) Montrer que $\mathsf{Var}(X) \leq \frac{n^2 k}{4}$.

(4) Soit $\lambda > 1$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/\sqrt{2}\right) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

(5) Montrer que pour tout entier x on a soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$, soit $\mathbb{P}(X = x) = 2^{-k}$. En remarquant qu'il y a au plus $\lambda n\sqrt{k}$ entiers x tels que $|x - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/2$, en déduire que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/\sqrt{2}\right) \leq 2^{-k}\lambda n\sqrt{k}.$$

(6) Conclure en prenant $\lambda = \sqrt{3}$.

Problème 2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité.

Première partie. Le but de cette partie est de montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty \quad \Longrightarrow \quad X_n \text{ converge presque sûrement vers } X.$$

(1) Soient $(B_i)_{i\geq 1}$ des événements tels que $\mathbb{P}(B_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\geq 1} B_i\right) = 1$.

(2) Pour tout $p \geq 1$, on pose $A_p = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{|X_k - X| < 1/p\}$. Justifier que

$$\{X_n \text{ converge vers } X\} = \bigcap_{p\geq 1} A_p.$$

(3) On suppose que pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < \infty$. En déduire que pour tout $p \geq 1$ on a $\mathbb{P}\left(A_p\right) = 1$, puis que X_n converge presque sûrement vers X.

Deuxième partie. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

(4) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$X_n \text{ converge presque sûrement vers } c \quad \Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - c| > \epsilon\right) < \infty.$$

Indication : on pourra raisonner par contraposée et utiliser le deuxième lemme de Borel-Cantelli.

Troisième partie. Si (x_n) est une suite, on rappelle qu'une sous-suite de (x_n) est une suite $(x_{\phi(n)})$ avec $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante.

Le but de cette partie est de montrer que X_n converge en probabilité vers X si, et seulement si, de toute sous-suite $(X_{\phi(n)})$ on peut extraire une nouvelle sous-suite $(X_{\phi(\psi(n))})$ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge presque sûrement vers X (appelé parfois le « lemme des sous-sous-suites »).

(5) Montrer que si X_n converge en probabilité vers X, alors pour tout $\epsilon > 0$ on a $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < \epsilon$ pour tout entier n suffisamment grand.

(5) Si X_n converge en probabilité vers X, montrer que toute sous-suite $X_{\phi(n)}$ converge également en probabilité vers X.

(6) Pour montrer le sens direct, considérons une sous-suite $(X_{\phi(n)})$. Montrer qu'il est possible de construire une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(|X_{\phi(\psi((n)))} - X| > \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge presque sûrement vers X.

(7) Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence de $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right)$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$. Il existe alors $\delta > 0$ et une sous-suite $(X_{\phi(n)})$ telle que $\mathbb{P}\left(|X_{\phi(n)} - X| > \epsilon\right) > \delta$ pour tout $n \geq 0$. Justifier que $X_{\phi(n)}$ ne converge pas en probabilité vers X et aboutir à une contradiction.

(8) (Application) On suppose que X_n converge en probabilité vers X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.