X2016 – MAP 311

PC 6 – 29 mai 2017 – Fonctions caractéristiques, Monte-Carlo, convergence en loi

Igor Kortchemski (doublage : Lucas Gerin)– igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311 *un peu après la PC.*

1 Fonctions caractéristiques

Exercice 1. (**Un peu de Poisson**)

(1) Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ.

(2) Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ_i. Montrer que $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$. Ce résultat reste-t-il vrai si les variables aléatoires ne sont plus supposées indépendantes ?

2 Monte Carlo

Exercice 2. **(Des calculs sans calculs)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\alpha>0$. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3 Convergence en loi

Exercice 3. (**Petites questions**)

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle X. Montrer que $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$ pour tout fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{P}(X_n=n)=\frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$. Montrer que X_n converge en loi vers une certaine variable aléatoire X. Est-ce que $\mathbb{E}[f(X_n)]\to\mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que X_n converge en loi vers X et telles que X_n converge en loi vers Y. Est-ce que $X=Y$ presque sûrement ?

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

Exercice 4. **(Équivalence de la convergence en probabilité et en loi vers une constante)** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c si et seulement si X_n converge en loi vers c.

Indication. Pour la réciproque, on pourra commencer par écrire $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \geq c+\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq c+\epsilon)$.

Exercice 5. **(Valeurs extrêmes)** Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $n \min(X_1,\dots,X_n)$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.

Exercice 6. **(Convergence en loi et fonctions caractéristiques)** Soit $\theta > 0$. On considère une suite $(T_n)_{n\geq n_0}$ de variables aléatoires où T_n suit une loi géométrique de paramètre $p_n = \frac{\theta}{n}$. Montrer que la suite $(T_n/n)_{n\geq n_0}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice 7. **(Un exemple)** Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par $F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n dont F_n est une fonction de répartition. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, et identifier la loi limite.

Exercice 8. **(Un autre exemple)** Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par $F_n(x) = 0$ si $x < n$ et $F_n(x) = 1$ si $x \geq n$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, existe une variable aléatoire X_n dont F_n est une fonction de répartition. Est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ?

4 Exercice à chercher pour la prochaine fois (12 juin)

Exercice 9. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 est de carré intégrable et que $\mathbb{E}[X_1] = 1$. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)}{\sum_{i=1}^n X_i}$.

5 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 10. Cet exercice présente un modèle pour la contamination au mercure.

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha, \lambda > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_1 > x) \sim \frac{\alpha}{x^\lambda}$ lorsque $x \to \infty$. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie par $Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1,\dots,X_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est $e^{-\alpha y^{-\lambda}} \mathbb{1}_{y>0}$ (loi de Fréchet de paramètre (α,λ)).

(2) Le mercure, métal lourd, est présent dans peu d'aliments. On le trouve essentiellement dans les produits de la mer. L'Organisation Mondiale de la Santé fixe la dose journalière admissible en mercure à $0.71 \mu g$ par jour et par kilo de poids corporel. Des études statistiques donnent la forme de la queue de distribution empirique de la contamination globale

P. Bertail. Evaluation des risques d'exposition à un contaminant alimentaire : quelques outils statistiques. www.crest.fr/doctravail/document/2002-41.pdf (2002).

annuelle en gramme de mercure pour un individu de 70 kg : $\mathbb{P}(X > x) = \frac{\alpha}{x^\lambda}$ pour x assez grand avec $\alpha = 3.54 \cdot 10^{-9}$ et $\lambda = 2.58$. Seriez-vous étonné–e qu'au moins une personne soit exposée à ce risque sanitaire en France ? À Palaiseau (Recensement 2013 : 31264 personnes) ? Dans une promotion de cinq cents étudiants ? À partir de quelle valeur de n pouvez-vous affirmer, avec seulement 5% de chances de vous tromper : « Parmi ces n personnes, au moins une a un niveau de mercure trop élevé » ?

Exercice 11. On casse un bâton de longueur 1 en n endroits choisis uniformément et indépendamment au hasard. On note L_n la longueur du plus long des $n+1$ bouts obtenus. Quel est le comportement de L_n lorsque $n \to \infty$? Le but de cet exercice est de montrer que $(n+1)L_n - \ln(n+1)$ converge en loi vers une loi de Gumbel (dont la fonction de répartition est $x \mapsto e^{e^{-x}}$).

Pour cela, soit $(X_i)_{1 \le i \le n+1}$ des variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre 1. On pose, pour $1 \le i \le n+1$,

$$S_i = X_1 + \cdots + X_i, \qquad Y_i = \frac{X_i}{S_{n+1}}.$$

(1) Déterminer la loi jointe de $(X_1, \ldots, X_n, S_{n+1})$ et en déduire celle de $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(2) En notant $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1})$ la longueur des bouts successifs obtenus, montrer que $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ont la même loi (on pourra utiliser le résultat de la question (1) de l'exercice 15 de la PC 4). En déduire que $\max(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ a la même loi que L_n.

(3) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $(x + \ln(n+1))\left(\frac{S_{n+1}}{n+1} - 1\right)$ converge en probabilité vers 0.

(4) En déduire le résultat désiré.

6 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 12. **(Convergences jointes)** Soient $(X_n)_{n \ge 1}$, $(Y_n)_{n \ge 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

(1) On suppose dans cette question que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \ge 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

(2) (**Lemme de Slutsky**) On suppose que $Y = a$ est constante. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, a)$ en loi.

Indications. On pourra utiliser le fait $Y_n \to Y$ en probabilité (exercice 4) et écrire

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[F(X, a)]| \le |\mathbb{E}[F(X_n, a)] - \mathbb{E}[F(X, a)]| \quad &+ \quad \mathbb{E}\Big[|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|Y_n - a| \ge \epsilon\}}\Big] \\ &+ \quad \mathbb{E}\Big[|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|Y_n - a| < \epsilon\}}\Big]. \end{aligned}$$

On admettra également que si Z_n est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, alors Z_n converge en loi vers Z si et seulement si pour toute fonction lipschitzienne bornée $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[f(Z_n)] \to \mathbb{E}[f(Z)]$.

(3) Eſt-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?

Exercice 13. **(Un calcul sans calcul)** Déterminer la limite de $e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to \infty$.

Indication. On pourra utiliser le théorème central limite.

Exercice 14. **(Le TCL n'eſt pas une convergence en probabilité)** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$.

(1) Rappeler la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$.

(2) Montrer que la suite $(Z_{2n} - Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.
Indication. On pourra écrire $Z_{2n} - Z_n = aZ_n + bZ'_n$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ choisis de sorte Z_n et Z'_n soient indépendantes et de même loi.

(3) En déduire que si $\sigma^2 > 0$ alors la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 15. **(Cauchy)** On rappelle qu'une loi de Cauchy a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. On peut démontrer (en utilisant les transformées de Fourier) que sa fonction caractériſtique eſt $\phi(t) = \exp(-|t|)$. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Cauchy. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Étudier les convergences en loi et en probabilité des suites suivantes.

$$(1)\quad \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \qquad (2)\quad \left(\frac{S_n}{n^2}\right)_{n\geq 1} \qquad (3)\quad \left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}.$$

Dans le cas (3), la loi des grands nombres s'applique-t-elle ?

Indication. Pour la troisième suite, on pourra déterminer la loi de $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$, raisonner par l'absurde et montrer qu'alors la suite $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 16. (**Loi faible, non forte**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2\ln(n+1)n}$. On pose $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

(1) Montrer que Y_n converge en probabilité vers 0. *Indication.* On pourra étudier $\mathbb{E}[Y_n^2]$.

(2) Montrer que presque sûrement, Y_n ne converge pas.

Exercice 17. **(Problème des moments)** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées. On suppose que $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X et Y ont la même loi.

Indication. Utiliser le théorème de Weierſtrass sur la densité des polynômes.

Exercice 18. (**Sommes aléatoires**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, centrées, de variance finie $\sigma^2 > 0$. On pose $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_m$. Soit $(N_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}_*$, toutes indépendantes de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose finalement $Z_k = \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k}$. On suppose que $N_k \to \infty$ p.s. lorsque $k \to \infty$. Montrer que Z_k converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.