X2016 – MAP 311 – PC 4

RAPPELS : Lois conditionnelles, vecteurs gaussiens

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Lois et densités conditionnelles (paragraphe 4.8.3)

On se place ici dans le cas où (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles à densité sur $\mathbb{R}^2$. On note $f_{(X,Y)}$ la densité de (X, Y), f_X la densité de X (on rappelle qu'on l'obtient en intégrant $f_{(X,Y)}$ par rapport à y) et f_Y la densité de Y (qu'on obtient en intégrant $f_{(X,Y)}$ par rapport à x).

Densité conditionnelle. On **définit** pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) > 0$:

$$\boxed{f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)}.}$$

On dit que $f_{Y|X=x}$ est la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$, qui est bien une densité sur $\mathbb{R}$ (Proposition 4.8.13 du poly).

De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_Y(y) > 0$, on définit la densité conditionnelle de X sachant que $Y = y$ par

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Espérance conditionnelle. L'espérance conditionnelle est définie comme une intégrale par rapport à une densité conditionnelle.

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction (soit positive, soit telle que $h(X, Y)$ est intégrable). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) > 0$, on **définit** (cf définition 4.8.15 du poly) l'espérance conditionnelle de $h(X, Y)$ sachant $X = x$ par

$$\boxed{\mathbb{E}\left[h(X, Y)|X = x\right] = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) f_{Y|X=x}(y) dy.}$$

☡ Attention. L'espérance conditionnelle de $h(X, Y)$ sachant $X = x$ est un **nombre** (qui dépend a priori de x).

Exemple. On a

$$\mathbb{E}\left[Y|X = x\right] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y) dy, \qquad \mathbb{E}\left[X|X = x\right] = \int_{\mathbb{R}} x f_{Y|X=x}(y) dy = x$$

car $f_{Y|X=x}$ est une densité, et aussi

$$\mathbb{E}\left[1|X = x\right] = \int_{\mathbb{R}} 1 f_{Y|X=x}(y) dy = 1, \qquad \mathbb{E}\left[h(X, Y)|X = x\right] = \mathbb{E}\left[h(x, Y)|X = x\right].$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

L'espérance conditionnelle de $h(X,Y)$ sachant X est la variable aléatoire définie par

$$\mathbb{E}\left[h(X,Y)|X\right] = \Psi(X) \qquad \text{avec} \qquad \Psi(x) = \mathbb{E}\left[h(X,Y)|X=x\right] = \mathbb{E}\left[h(x,Y)|X=x\right].$$

Attention. L'espérance conditionnelle de $h(X,Y)$ sachant X est une **variable aléatoire**.

Exemple. On a $\mathbb{E}[Y|X] = \Psi(X)$ *avec* $\Psi(X) = \mathbb{E}[Y|X=x]$.

Propriétés de l'espérance conditionnelle. On utilise souvent les faits suivants dans les manipulations d'espérances conditionnelles (Proposition 4.8.17) :

(1) Soit Y intégrable. Alors

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|X]\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[Y|X=x]\, f_X(x)dx.$$

(2) (linéarité) Soient Y, Z intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}[aY + bZ|X] = a\mathbb{E}[Y|X] + b\mathbb{E}[Z|X].$$

(3) (positivité) $\mathbb{E}[Y|X] \geq 0$ si $Y \geq 0$,

(4) Si g est mesurable positive ou bornée

$$\mathbb{E}[Yg(X)|X] = g(X)\mathbb{E}[Y|X].$$

Exemple.

$$\mathbb{E}[X|X] = X \qquad \mathbb{E}\left[\frac{Y^2}{X} \;\middle|\; X\right] = \frac{1}{X} \cdot \mathbb{E}\left[Y^2|X\right].$$

2 Vecteurs gaussiens (paragraphe 6.2 du poly)

La notion de vecteur gaussien est la généralisation d'une variable aléatoire réelle gaussienne en dimension supérieure.

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est appelé vecteur gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n a_j X_j$ suit une loi normale.

Caractérisation. La loi d'un vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_n)$ est caractérisée par la donnée des deux objets suivants :

(1) le vecteur des moyennes $(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])$,

(2) la matrice des covariances $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ (qui est une matrice symétrique positive).

Lorsque $\mathbb{E}[X_i] = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on dit que le vecteur gaussien est centré.

Indépendance. Soit $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien. Les vecteurs $(X_1, \dots, X_m)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendants si et seulement si

$$\text{pour tous } i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\} \qquad \mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0.$$

Le fait que l'indépendance puisse être vérifiée à partir de calculs de covariances est une propriété fondamentale qui fait un des intérêts des vecteurs gaussiens.