

### 3 Lois conditionnelles

**Exercice 4.** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles à densité sur  $\mathbb{R}^2$  tel que :

- $X$  suit une loi  $\Gamma(2, \lambda)$  (de densité  $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ ),
- la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$  est la loi uniforme sur le segment  $[0, X]$  (ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de  $Y$  sachant que  $X = x$  est  $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0 < y < x}$ ).

(1) Déterminer la densité de  $(X, Y)$  ainsi que la loi de  $Y$ .

(2) Calculer la densité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$ .

(3) Calculer les quantités suivantes :

(a)  $\mathbb{E}[Y|X]$ ,

(d)  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$ ,

(b)  $\mathbb{E}[X|Y]$ ,

(c)  $\mathbb{E}[X + XY|Y]$ ,

(e)  $\mathbb{E}[XY]$  (on pourra utiliser le fait que  $\mathbb{E}[X^2] = \frac{6}{\lambda^2}$ ).

#### Corrigé :

(1) Par définition,

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)},$$

où  $f_{(X,Y)}$  est la densité de  $(X, Y)$ . On en déduit que

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{0 < y < x}.$$

La loi de  $Y$  est alors à densité, de densité  $f_Y$  donnée par

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \lambda^2 \int_y^{\infty} e^{-\lambda x} dx \mathbb{1}_{y > 0} = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y > 0}.$$

Ainsi,  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

(2) Par définition,  $f_{X|Y=y}(x)$  est donné par

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} = \lambda e^{-\lambda x + \lambda y} \mathbb{1}_{0 < y < x}.$$

(3) (a) On a  $\mathbb{E}[Y|X] = \Psi_1(X)$ , avec

$$\Psi_1(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y) dy = \int_0^x \frac{y}{x} dy \mathbb{1}_{x > 0} = \frac{x}{2} \mathbb{1}_{x > 0}.$$

Ainsi,  $\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X}{2}$ .

(b) On a  $\mathbb{E}[X|Y] = \Psi_2(Y)$  avec

$$\Psi_2(y) = \mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x) dx = \lambda e^{\lambda y} \mathbb{1}_{y>0} \int_y^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variable  $u = x - y$ , de sorte que

$$\Psi_2(y) = \mathbb{1}_{y>0} \int_0^{\infty} (u+y) \lambda e^{-\lambda u} du = \left(\frac{1}{\lambda} + y\right) \mathbb{1}_{y>0}.$$

Ainsi,  $\mathbb{E}[X|Y] = \frac{1}{\lambda} + Y$ .

(c) On a

$$\mathbb{E}[X + XY|Y] = \mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[XY|Y] = \mathbb{E}[X|Y] + Y\mathbb{E}[X|Y] = (Y+1)\left(\frac{1}{\lambda} + Y\right).$$

(d) On sait que  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$ . Comme  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , on a donc  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = 1/\lambda$ .

(e) Pour simplifier le calcul, l'idée est d'écrire  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|X]]$ . En effet,  $\mathbb{E}[XY|X] = X\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X^2}{2}$ , donc

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{2}\right] = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2} = \frac{3}{\lambda^2}.$$

□

## 4 Vecteurs gaussiens

**Exercice 5.** Soit  $X = (X_1, X_2, X_3)$  un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Que peut-on dire de  $X_3$  et de  $(X_1, X_2)$ ?
- (2) Quelle est la loi de  $(X_1, X_2)$ ?
- (3) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$  le vecteur  $(X_2, X_2 + aX_1)$  est un vecteur gaussien.
- (4) En choisissant  $a$  de sorte que  $X_2$  et  $X_2 + aX_1$  soient indépendants, calculer  $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ .

### Corrigé :

- (1) On voit que pour  $i = 1$  et  $i = 2$  on a  $\text{Cov}(X_3, X_i) = 0$ . Donc  $X_3$  est indépendant du vecteur gaussien  $(X_1, X_2)$ .
- (2) Le vecteur gaussien  $(X_1, X_2)$  est centré, de matrice de covariance  $\Gamma_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- (3) Toute combinaison linéaire de  $X_2$  et de  $X_2 + aX_1$  est une combinaison linéaire de  $X_1$  et de  $X_2$ , donc est une variable gaussienne car  $(X_1, X_2)$  est un vecteur gaussien. Donc le vecteur  $(X_2, X_2 + aX_1)$  est gaussien (centré).
- (4) Comme le vecteur  $(X_2, X_2 + aX_1)$  est gaussien (centré),  $X_2$  et  $X_2 + aX_1$  sont indépendants si et seulement si  $\text{Cov}(X_2, X_2 + aX_1) = 0$ . Or

$$\text{Cov}(X_2, X_2 + aX_1) = \mathbb{E}[X_2(X_2 + aX_1)] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_2 + aX_1] = \mathbb{E}[X_2^2] + a\mathbb{E}[X_1X_2] = 2 + a.$$

En prenant  $a = -2$ , on en déduit que  $X_2 - 2X_1$  et  $X_2$  sont indépendants.

Pour calculer  $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ , l'idée est de choisir  $\alpha, \beta$  pour avoir  $X_1 = \alpha(X_2 - 2X_1) + \beta X_2$  : en écrivant  $X_1 = -\frac{1}{2}(X_2 - 2X_1) + \frac{1}{2}X_2$ , on obtient donc :

$$\mathbb{E}[X_1|X_2] = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[X_2 - 2X_1|X_2] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}X_2|X_2\right] = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[X_2 - 2X_1] + \frac{1}{2}X_2 = \frac{1}{2}X_2.$$

□

**Exercice 6.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour  $a > 0$ , on pose  $Y_a = X\mathbb{1}_{|X|<a} - X\mathbb{1}_{|X|\geq a}$ .

- (1) Montrer que  $Y_a$  est une variable aléatoire normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- (2) Montrer qu'il existe un unique réel  $a > 0$  tel que  $\text{Cov}(X, Y_a) = 0$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y_a$  sont-elles alors indépendantes? Le vecteur  $(X, Y_a)$  est-il un vecteur gaussien?

**Corrigé :**

- (1) On applique la méthode de la fonction muette. Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée. On calcule  $\mathbb{E}[h(Y_a)]$ . En remarquant que  $\mathbb{E}[h(Y_a)] = h(X)\mathbb{1}_{|X|<a} + h(-X)\mathbb{1}_{|X|\geq a}$ , en utilisant la linéarité de l'espérance, la formule de transfert et le changement de variable  $y = -x$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(Y_a)] &= \int_{|x|\leq a} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}} dx + \int_{|x|\geq a} h(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}} dx \\ &= \int_{|x|\leq a} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}} dx + \int_{|x|\geq a} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}} dx \\ &= \mathbb{E}[h(X)]. \end{aligned}$$

Donc  $Y_a$  et  $X$  ont la même loi, d'où le résultat.

- (2) On a  $\mathbb{E}[Y_a] = \mathbb{E}[X] = 0$ , et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[Y_a X] = \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{|X|<a}] - \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{|X|\geq a}].$$

Or  $\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{|X|<a}] + \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{|X|\geq a}] = \mathbb{E}[X^2] = 1$ . Ainsi,  $\text{Cov}(X, Y_a) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{|X|<a}] = 1/2$ . On voit aisément que  $a \mapsto \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{|X|<a}]$  est strictement croissante, vaut 0 en 0 et tend vers 1 en  $+\infty$ . Il existe donc un unique réel  $a > 0$  tel que  $\text{Cov}(X, Y_a) = 0$  (numériquement,  $a \simeq 1.538$ ).

Si  $X$  et  $Y_a$  étaient indépendantes, le vecteur  $(X, Y_a)$  serait à densité et donc on aurait  $\mathbb{P}(X = Y_a) = 0$ . Or  $\mathbb{P}(X = Y_a) = \mathbb{P}(|X| < a) > 0$ . Donc  $X$  et  $Y_a$  ne sont pas indépendantes. En particulier,  $(X, Y_a)$  n'est pas un vecteur gaussien.

□

5 5

## 6 Plus appliqué (hors PC)

**Exercice 8.** (Erreurs dans la mesure de la position d'une étoile & Loi de Herschel (1850)) Pour repérer une étoile on utilise deux nombres, l'ascension droite  $x$  (équivalent sur la sphère céleste de la longitude terrestre) et la déclinaison  $y$

(équivalent sur la sphère céleste de la latitude terrestre). À cause des erreurs de mesure, on modélise l'ascension droite par une variable aléatoire réelle  $X$  et la déclinaison par une variable aléatoire réelle  $Y$ .

Déterminer  $f_{(X,Y)}$ , la densité de  $(X, Y)$ , en faisant les hypothèses naturelles suivantes :

- (1)  $f_X = f_Y = f$  (densité de probabilité commune  $f$ , de classe  $C^1$ );
- (2)  $X$  et  $Y$  sont indépendantes;
- (3) Il existe une fonction  $g$  de classe  $C^1$  telle que  $f_{(X,Y)}(x, y) = g(x^2 + y^2)$  pour tous  $x, y$  (commenter cette hypothèse).

### Corrigé :

Tout d'abord, l'hypothèse (3) signifie qu'on suppose que le repère choisi est arbitraire et que le faire tourner d'un certain angle ne devrait pas affecter la densité de probabilité.

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  on a  $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = f(x)f(y) = g(x^2 + y^2)$ . En dérivant par rapport à  $x$ , on obtient  $f'(x) f(y) = 2xg'(x^2 + y^2)$ , de sorte que et on a donc

$$\frac{f'(x)}{2xf(x)} = \frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)} = \frac{f'(y)}{2yf(y)}.$$

Cela signifie que le quotient de gauche est égal à une constante  $c$  :

$$\frac{f'(x)}{2xf(x)} = c \implies \frac{d}{dx}(\ln f(x)) = cx \implies f(x) = k e^{cx^2/2}$$

où  $k$  est une constante. On veut que  $f$  soit une densité, c.-à-d. une fonction positive telle  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ , donc  $k > 0$  et  $c < 0$ , avec  $k = \sqrt{\frac{|c|}{2\pi}}$ .

On en déduit que  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $1/c$ .

*Complément.* Maxwell a utilisé cet argument en 1860 pour trouver la loi de distribution de la vitesse  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  d'une molécule dans un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique. C'est donc la généralisation évidente de ce qui précède au cas où on a trois dimension : on trouve

$$f_{\mathbf{v}}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{a}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right).$$

Par des considérations physiques, on a  $a = \frac{m}{kT}$  où  $m$  est la masse de la molécule,  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue du gaz. On a donc une variance égale à

$$kT/m$$

c.-à-d. proportionnelle à la température, ce qui est cohérent avec la physique : si on identifie une gaussienne de variance nulle avec une masse de Dirac, on retrouve qu'à température nulle, il n'y a aucune dispersion des vitesses, tandis que si la température augmente, on s'attend à avoir des écarts par rapport à la vitesse moyenne (qui est nulle) de plus en plus grands. Faire l'hypothèse que les trois composantes de la vitesse sont indépendantes est assez discutable.

□

**Exercice 9. (Pale 2014)** On considère le jeu de la courte paille entre deux joueurs. Une troisième personne choisit un bâton puis elle le coupe en deux. Elle présente alors les deux morceaux aux joueurs en cachant la différence de longueur dans sa main. Le premier joueur choisit un morceau et le second prend l'autre. Celui qui a le morceau le plus long gagne. La longueur  $U$  du bâton est supposée suivre la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et les deux morceaux finaux ont pour longueur  $X = UV$  et  $Y = U(1 - V)$  avec  $V$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$  indépendante de  $U$ .

- (1) Calculer  $\mathbb{E}[X]$  et  $\text{Var}(X)$ .
- (2) Donner la loi de  $-\ln(U)$ . En déduire sans calcul que  $\xi = -\ln(X)$  suit la loi  $\Gamma(2, 1)$ . Déterminer la loi de  $X$ .
- (3) Quelle est la loi de  $(X, Y)$  (faire attention au domaine image du changement de variables)? Les longueurs des morceaux sont-elles indépendantes? Comparer les lois de  $(Y, X)$  et de  $(X, Y)$ . Le jeu est-il équitable? Retrouver la densité de  $X$ .

**Corrigé :**

- (1) Puisque  $U$  et  $V$  sont indépendantes,  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V] = 1/4$ . De même,  $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[U^2]\mathbb{E}[V^2] = 1/9$  et  $\text{Var}(X) = 1/9 - 1/16 = 7/144$ .
- (2) On sait que  $-\ln(U)$  suit la loi exponentielle de paramètre 1 (voir Exercice 10 (1) ou paragraphe 4.6.2 du poly). La variable aléatoire  $\xi$  est donc la somme de deux variables exponentielles de paramètre 1 et suit donc une loi  $\Gamma(2, 1)$ , de densité  $xe^{-x}\mathbb{1}_{x>0}$ . Pour déterminer la loi de  $X$ , on utilise la méthode de la fonction muette. Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. On calcule  $\mathbb{E}[h(X)]$  avec le théorème de transfert puis avec le changement de variable  $x = e^{-z}$  :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(e^{-\xi})] = \int_0^{\infty} h(e^{-z})ze^{-z}dz = - \int_0^1 \phi(x)\ln(x)dx.$$

Donc  $X$  est à densité, de densité  $-\mathbb{1}_{0<x<1}\ln(x)$ .

- (3) On utilise la méthode de la fonction muette. Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \mathbb{E}[h(UV, U(1-V))] = \int_0^1 \int_0^1 h(uv, u(1-v))dudv.$$

On a donc envie de faire le changement de variable  $x = uv$  et  $y = u(1-v)$ . Par ailleurs  $0 < u, v < 1$  si et seulement si  $0 < x + y < 1$  et  $x, y > 0$ . Ainsi, l'application  $(u, v) \mapsto (uv, u(1-v))$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $]0, 1[^2$  sur  $\{(x, y) \in ]0, 1[^2 : x + y < 1\}$ , de matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}$$

et donc de jacobien  $|u|$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X, Y)] &= \int_0^1 \int_0^1 h(uv, u(1-v))u \cdot \frac{dudv}{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \frac{\mathbb{1}_{x>0, y>0, x+y<1}}{x+y} dx dy. \end{aligned}$$

Le couple  $(X, Y)$  est donc à densité, de densité donnée par  $f_{(X, Y)}(x, y) = \frac{\mathbb{1}_{x>0, y>0, x+y<1}}{x+y}$ .

Comme cette quantité ne peut pas se mettre sous forme du produit d'une fonction de  $x$  par une fonction de  $y$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont donc pas indépendantes. Cependant, la fonction  $f_{(X, Y)}$  est symétrique en ces variables, de sorte que  $(X, Y)$  et  $(Y, X)$  ont la même loi, ce qui entraîne que

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X) = \frac{1 - \mathbb{P}(X = Y)}{2} = \frac{1 - 0}{2}$$

si bien que le jeu est équitable. On retrouve la densité de  $X$  en intégrant par rapport à  $y$  :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X, Y)}(x, y) dy = \mathbb{1}_{x>0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0<y<1-x} \frac{dy}{x+y} = \mathbb{1}_{0<x<1} \int_0^{1-x} \frac{dy}{x+y} = -\mathbb{1}_{0<x<1} \ln(x)$$

□

**Exercice 10. (Simulation d'une loi de Poisson)** Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme, et soit  $\lambda > 0$ . On pose  $E_n = -\ln(U_n)/\lambda$  pour tout  $n \geq 1$  et  $T_n = E_1 + \dots + E_n$ .

- (1) Identifier la loi de  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ , puis la loi de  $T_n$  comme une loi (presque) classique.
- (2) On pose  $N = \min\{n \geq 0 : U_1 U_2 \dots U_{n+1} < e^{-\lambda}\}$ . Montrer que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Corrigé :**

- (1) Soit  $1 \leq i \leq n$ . Si  $x \leq 0$ , on a  $\mathbb{P}(E_i \leq x) = 0$ , et pour  $x \geq 0$  on a

$$\mathbb{P}(E_i \leq x) = \mathbb{P}(U_n \geq e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Donc  $E_i$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Par ailleurs, d'après le principe de composition, les variables aléatoires  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendantes.

Ainsi,  $T_n$  suit la loi  $\Gamma(n, \lambda)$  comme somme de  $n$  variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre  $\lambda > 0$ .

- (2) Soit  $n \geq 0$  un entier. Comme les événements  $\{N = n\}$  et  $\{T_1 \leq 1, T_2 \leq 1, \dots, T_{n+1} > 1\}$  sont égaux, on a, en utilisant le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(E_1 \leq 1, E_1 + E_2 \leq 1, \dots, E_1 + \dots + E_n \leq 1, E_1 + \dots + E_{n+1} > 1) \\ &= \int_{]0, \infty[^{n+1}} \mathbb{1}_{x_1 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, \dots, x_1 + \dots + x_n \leq 1, x_1 + \dots + x_{n+1} > 1} \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{n+1})} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

L'application  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_{n+1})$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $]0, \infty[^{n+1}$  sur  $\{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in ]0, \infty[^{n+1} : y_1 < y_2 < \dots < y_{n+1}\}$  de jacobien 1. Le changement de variable  $y_i = x_1 + \dots + x_i$  donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \int_{0 < y_1 < \dots < y_n \leq 1, y_{n+1} > 1} \lambda^{n+1} e^{-\lambda y_{n+1}} dy_1 \dots dy_{n+1} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^n \int_{0 < y_1 < \dots < y_n \leq 1} dy_1 \dots dy_n \\ &= e^{-\lambda} \lambda^n \int_{0 < y_2 < \dots < y_n \leq 1} y_2 dy_2 \dots dy_n \\ &= e^{-\lambda} \lambda^n \int_{0 < y_3 < \dots < y_n \leq 1} \frac{y_3^2}{2} dy_3 \dots dy_n \\ &= e^{-\lambda} \lambda^n \int_{0 < y_n \leq 1} \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} dy_n \quad (\text{par récurrence}) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

## 7 Pour aller plus loin (hors PC)

**Exercice 11. (Pale 2013)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\Gamma(\alpha, \lambda)$  et  $\Gamma(\alpha + 1/2, \lambda)$ , avec  $\alpha > 0$  et  $\lambda > 0$ . On pose  $(V, W) = (\sqrt{XY}, \sqrt{Y})$ . Déterminer la loi de  $(V, W)$ .

On rappelle que la densité de la loi  $\Gamma(a, \lambda)$  est (c.f. Section 4.6.3 du poly)  $\frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$  avec  $\Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z} dz$ .

**Corrigé :** Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, la loi de  $(X, Y)$  a pour densité  $(x, y) \mapsto f_X(x)f_Y(y)$ , où  $f_X$  et  $f_Y$  désignent les densités de  $X$  et  $Y$ . On utilise alors la méthode de la fonction muette :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(V, W)] &= \mathbb{E}[h(\sqrt{XY}, \sqrt{Y})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(\sqrt{xy}, \sqrt{y}) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(\sqrt{xy}, \sqrt{y}) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \frac{\lambda^{2\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{]0, \infty[^2} h(\sqrt{xy}, \sqrt{y}) (xy)^{\alpha-1/2} e^{-\lambda(x+y)} \frac{dx dy}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

On considère le changement de variable  $v = \sqrt{xy}, w = \sqrt{y}$  qui est un  $C^1$  difféomorphisme de  $]0, \infty[^2$  dans lui-même. Le calcul du déterminant de la matrice jacobienne donne

$$dv dw = \frac{dx dy}{4\sqrt{x}}.$$

Ainsi, avec  $y = w^2$  et  $x = v^2/w^2$ ,

$$\mathbb{E}[h(V, W)] = \frac{4\lambda^{2\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{]0, \infty[^2} h(v, w) v^{2\alpha-1} e^{-\lambda(w^2 + \frac{v^2}{w^2})} dv dw.$$

Ainsi,  $(V, W)$  est à densité et sa densité est donnée par

$$f_{(V,W)}(v, w) = \frac{4\lambda^{2\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} v^{2\alpha-1} e^{-\lambda(w^2 + \frac{v^2}{w^2})} \mathbb{1}_{v>0, w>0}.$$

□

**Exercice 12.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$  pour un certain  $p \geq 1$  et  $\mathbb{E}[Y] = 0$ . Montrer  $\mathbb{E}[|X+Y|^p] \geq \mathbb{E}[|X|^p]$ .

*Indication.* On pourra montrer que  $g : y \mapsto \mathbb{E}[|X+y|^p]$  est convexe et utiliser l'exercice 15 de la PC 3, qui dit que lorsque  $X$  et  $Y$  sont indépendants, on a  $\mathbb{E}[F(X, Y)] = \mathbb{E}[G(Y)]$  où  $G$  est la fonction définie par  $G(y) = \mathbb{E}[F(X, y)]$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

**Corrigé :**

Tout d'abord, on sait qu'à  $x$  fixé la fonction  $f_x(y) = |x+y|^p$  est convexe. Ainsi, pour  $a < b$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $f_x(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f_x(a) + (1-\lambda)f_x(b)$ . En remplaçant  $x$  par  $X$ , en prenant l'espérance et utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient que  $g(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)$ , de sorte que  $g$  est convexe.

Ensuite, par indépendance (deuxième partie de l'indication), on a  $\mathbb{E}[|X+Y|^p] = \mathbb{E}[g(Y)]$ . D'après l'inégalité de Jensen,  $g(\mathbb{E}[Y]) \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ . Or  $\mathbb{E}[Y] = 0$  et donc

$$\mathbb{E}[|X|^p] = g(0) = g(\mathbb{E}[Y]) \leq \mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[|X+Y|^p].$$

□

**Exercice 13.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre  $\lambda > 0$  avec  $n \geq 2$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

- (1) Identifier la loi de  $S_n$  comme une loi (presque) classique.
- (2) Trouver la densité conditionnelle de  $X_1$  sachant que  $S_n = t$ .

(3) En déduire la valeur de l'espérance conditionnelle de  $X_1$  sachant  $S_n$ . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

**Corrigé :**

- (1)  $S_n$  suit la loi  $\Gamma(n, \lambda)$  comme somme de  $n$  variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre  $\lambda > 0$ .
- (2) On commence par déterminer la loi jointe  $(X_1, S_n)$  par la méthode de la fonction muette. Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée et on calcule  $\mathbb{E}[h(X_1, S_n)]$ . Pour simplifier les calculs, on remarque que  $S_n = X_1 + Y$  avec  $Y$  indépendante de  $X_1$  et qui suit une loi  $\Gamma(n-1, \lambda)$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X_1, S_n)] &= \mathbb{E}[h(X_1, X_1 + Y)] \\ &= \int_{]0, \infty[^2} h(x, x+y) \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\lambda y} dx dy. \end{aligned}$$

L'application  $(x, y) \mapsto (x, x+y)$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $]0, \infty[^2$  sur  $\{(u, v) \in ]0, \infty[^2 : u < v\}$ , de jacobien 1. On fait alors changement de variable  $u = x$  et  $v = x + y$  :

$$\mathbb{E}[h(X_1, S_n)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(u, v) \frac{\lambda^n}{(n-2)!} (v-u)^{n-2} e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{v>u>0} du dv.$$

Donc  $(X_1, S_n)$  est à densité, de densité donnée par

$$f(u, v) = \frac{\lambda^n}{(n-2)!} (v-u)^{n-2} e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{v>u>0}.$$

La densité conditionnelle de  $X_1$  sachant que  $S_n = t$  vaut donc

$$f_{X_1|S_n=t}(u) = \frac{\frac{\lambda^n}{(n-2)!} (t-u)^{n-2} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>u>0}}{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}} = (n-1) \frac{(t-u)^{n-2}}{t^{n-1}} \mathbb{1}_{t>u>0}$$

(3) On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1|S_n=t] &= \int_{\mathbb{R}} u f_{X_1|S_n=t}(u) du = \frac{n-1}{t^{n-1}} \int_0^t u (t-u)^{n-2} du = \frac{n-1}{t^{n-1}} \int_0^t (t-u) u^{n-2} du \\ &= \frac{n-1}{t^{n-1}} \left( t \cdot \frac{t^{n-1}}{n-1} - \frac{t^n}{n} \right) = \frac{t}{n} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}.$$

Retrouvons ce résultat en utilisant la symétrie du problème. Par symétrie, on a  $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \mathbb{E}[X_2|S_n] = \dots = \mathbb{E}[X_n|S_n] = \Psi(S_n)$ . Alors

$$n\Psi(S_n) = \mathbb{E}[X_1|S_n] + \mathbb{E}[X_2|S_n] + \dots + \mathbb{E}[X_n|S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n|S_n] = \mathbb{E}[S_n|S_n] = S_n.$$

Donc  $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}$ .

□

**Exercice 14.** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles à densité sur  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- (1) Montrer que  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ .
- (2) Plus généralement, montrer que  $\mathbb{E}[h(X, Y)|X] = \Phi(X)$ , avec  $\Phi(x) = \mathbb{E}[h(x, Y)]$ .

**Corrigé :**

(1) Par définition,  $\mathbb{E}[X|Y] = \Psi(Y)$ , avec

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} dx.$$

Or  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, donc  $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ . On en déduit que

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \mathbb{E}[X].$$

Donc  $\mathbb{E}[X|Y]$  est une variable aléatoire constante qui vaut  $\mathbb{E}[X]$ .

(2) Par définition,  $\mathbb{E}[h(X,Y)|X] = \Phi(X)$  avec

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} dy = \int_{\mathbb{R}} h(x,y) f_Y(y) dy = \mathbb{E}[h(x,Y)].$$

□

**Exercice 15. (Réarrangement croissant de variables uniformes)** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ . L'exercice 14 de la PC 3 montre qu'il existe une permutation aléatoire  $\sigma$  telle que  $\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(n)}) = 1$  et que la loi de  $\sigma$  est uniforme sur l'ensemble des permutations de longueur  $n$ . On pose

$$(Y_1, \dots, Y_n) = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

(1) Déterminer la loi de  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

(2) Déterminer la loi de  $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$ .

**Corrigé :**

(1) Soit  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. On a, en notant  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y_1, \dots, Y_n)] &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{\{0 \leq x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_n} \leq 1\}} f(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) dx_1 \dots dx_n \\ &= n! \int_{\{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1\}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

La loi de  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est donc à densité, de densité donnée par

$$n! \mathbb{1}_{\{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1\}} dx_1 \dots dx_n.$$

(2) Soit maintenant  $g : ]0, 1[^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. On a

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right] = n! \int_{\{0 < x_1 < \dots < x_n < 1\}} g\left(\frac{x_1}{x_2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) dx_1 \dots dx_n.$$

Alors  $\phi : (x_1, \dots, x_n) \in \{0 < x_1 < \dots < x_n < 1\} \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \in ]0, 1[^{n-1}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de jacobien égal à  $(x_2 \dots x_n)^{-1}$ . Ainsi, d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right] &= n! \int_{]0, 1[^n} g(u_1, \dots, u_{n-1}) u_2 u_3^2 \dots u_{n-1}^{n-2} u_n^{n-1} du_1 \dots du_n \\ &= (n-1)! \int_{]0, 1[^{n-1}} g(u_1, \dots, u_{n-1}) u_2 u_3^2 \dots u_{n-1}^{n-2} du_1 \dots du_{n-1}. \end{aligned}$$

Donc la loi de  $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$  est

$$(n-1)! u_2 u_3^2 \dots u_{n-1}^{n-2} \mathbb{1}_{]0,1[^{n-1}}(u_1, \dots, u_{n-1}) du_1 \dots du_{n-1}.$$

**Remarque :** les variables  $Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n$  sont donc indépendantes, et chaque  $Y_i/Y_{i+1}$  est de loi  $iy^{i-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(y) dy$ .

□

**Exercice 16. (Réarrangement croissant de lois exponentielles)** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ . On considère des variables aléatoires  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  indépendantes telles que  $E_k$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_k$ . On note  $E_{(1)} \leq E_{(2)} \leq \dots \leq E_{(n)}$  les variables aléatoires  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  réarrangées dans l'ordre croissant.

- (1) Montrer que  $E_{(1)}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .
- (2) Montrer que  $\mathbb{P}(E_{(1)} < E_{(2)}) = 1$  (ainsi le minimum des variables est atteint une unique fois presque sûrement).
- (3) On note  $N = \min\{1 \leq i \leq n : E_i = E_{(1)}\}$ . Montrer que  $N$  et  $E_{(1)}$  sont indépendants, et que  $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ .

**Corrigé :**

- (1) Si  $x < 0$ , on a  $\mathbb{P}(E_{(1)} \geq x) = 1$ . Si  $x \geq 0$ , on a

$$\mathbb{P}(E_{(1)} \geq x) = \mathbb{P}(E_1 \geq x, \dots, E_n \geq x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i \geq x) = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x}.$$

Donc  $E_{(1)}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

- (2) On remarque que l'événement  $\{E_{(1)} < E_{(2)}\}$  contient l'événement  $\{\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } i \neq j \text{ on a } X_i \neq X_j\}$ . Il suffit donc de montrer que ce dernier événement est de probabilité 1 ou, de manière équivalente, que son complémentaire est de probabilité nulle. Pour cela, on adapte l'argument de l'exercice 14 (1) de la PC 3 : on a

$$\mathbb{P}(\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq j \text{ et } E_i = E_j) \leq \sum_{i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j} \mathbb{P}(E_i = E_j).$$

Or, d'après le théorème de transfert, en notant  $f_k$  la densité de  $E_k$ , pour  $i \neq j$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_i = E_j) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_i = E_j}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \mathbb{1}_{x_i = x_j} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f_i(x) f_j(y) \mathbb{1}_{x=y} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx f_i(x) \int_x^x f_j(y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- (3) Calculons pour un entier  $1 \leq k \leq n$  et  $t \geq 0$  la quantité  $\mathbb{P}(E_{(1)} > t, N = k)$  en remarquant les événements

$\{E_{(1)} > t, N = k\}$  et  $\{E_k > t, E_j > E_k \text{ pour tout } j \neq k\}$  sont égaux :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{(1)} > t, N = k) &= \mathbb{P}(E_k > t, E_j > E_k \text{ pour tout } j \neq k) \\ &= \int_{]0, \infty[^n} \mathbb{1}_{x_k > t, x_j > x_k \text{ pour tout } i \neq k} \prod_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i x_i} dx_i \\ &= \int_{]0, \infty[} \mathbb{1}_{x_k > t} \lambda_k e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)x_k} dx_k \\ &= e^{-t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

En prenant  $t = 0$ , on trouve que  $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ , ce qui permet d'identifier la loi de  $N$ , et en réinjectant dans l'égalité précédente on voit que

$$\mathbb{P}(E_{(1)} > t, N = k) = \mathbb{P}(E_{(1)} > t) \mathbb{P}(N = k).$$

Ceci étant valable pour tout  $t \in \mathbb{R}$  (il n'y a rien à faire si  $t < 0$ ) et  $1 \leq k \leq n$ , on en déduit que  $E_{(1)}$  et  $N$  sont indépendants. □

**Exercice 17. (Processus de Poisson)** Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $T_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_n = X_1 + \dots + X_n$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

- (1) Soit  $n \geq 1$ . Calculer la loi du  $n$ -uplet  $(T_1, \dots, T_n)$ .
- (2) En déduire la loi de  $N_t$  pour tout  $t > 0$ .
- (3) Pour  $n \geq 1$  et  $t > 0$ , on définit sur  $\Omega$  une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{n,t}$  par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Calculer la loi du  $n$ -uplet  $(T_1, \dots, T_n)$  sous la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{n,t}$ .

**Corrigé :**

- (1) Soit  $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue bornée. On a

$$\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n) e^{-(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Or  $\phi : (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n) \in \{0 < t_1 < \dots < t_n\}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de jacobien égal à 1 donc d'après la formule du changement de variables,

$$\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) e^{-t_n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}} dt_1 \dots dt_n,$$

ce qui signifie que la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$  a pour densité  $e^{-t_n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}}$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On remarque que  $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t)$  (car avec probabilité 1 la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  est croissante). On en déduit d'après la question (1) que pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-t_{n+1}} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}\}} \mathbb{1}_{\{t_n \leq t\}} \mathbb{1}_{\{t_{n+1} > t\}} dt_1 \dots dt_n dt_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} dt_1 \dots dt_n \int_t^\infty e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \\ &= \frac{t^n}{n!} e^{-t}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. Et l'on a

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) = \int_t^\infty e^{-x} dx = e^{-t}.$$

On voit que  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $t$  (c'est en fait ce qu'on avait déjà démontré à la question (2) de l'exercice 10).

(3) Notons  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}$  l'espérance – c'est-à-dire l'intégrale au sens de Lebesgue – par rapport à la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{n,t}$ . Alors, pour toute fonction continue bornée  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}[F] = \frac{\mathbb{E}[F \mathbb{1}_{\{N_t = n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)}. \quad (1)$$

En effet, la formule de l'énoncé donne la version ensembliste (définition des probabilités  $\mathbb{Q}^{n,t}(A)$ ) et (1) est la version fonctionnelle pour des variables aléatoires. Comme d'habitude en théorie de la mesure, on passe du point de vue ensembliste au point de vue fonctionnel par approximation par des fonctions étagées. Plus précisément, par définition,

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}[F] = \frac{\mathbb{E}[F \mathbb{1}_{\{N_t = n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)}$$

pour toute fonction étagée  $F$ . En effet, si  $F_n = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{B_i}$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}[F] &= \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}[\mathbb{1}_{B_i}] \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{Q}^{n,t}(B_i) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \frac{\mathbb{P}(B_i \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad (\text{par définition de } \mathbb{Q}^{n,t}) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_i \cap \{N_t = n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad (\text{la probabilité de } B_i \cap \{N_t = n\} \text{ est l'espérance de } \mathbb{1}_{B_i \cap \{N_t = n\}}) \\ &= \frac{\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{B_i}) \mathbb{1}_{\{N_t = n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= \frac{\mathbb{E}[F \mathbb{1}_{\{N_t = n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad (\text{par définition de } F). \end{aligned}$$

On en déduit ensuite que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}[F] = \frac{\mathbb{E}[F \mathbb{1}_{\{N_t=n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)}$$

pour toute fonction mesurable positive  $F$  en appliquant le théorème de convergence monotone, et on arrive à (1).

Ainsi, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée, en prenant pour  $F$  la fonction  $F = f(T_1, \dots, T_n)$  on trouve que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}[f(T_1, \dots, T_n)] = \frac{\mathbb{E}[f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{1}_{\{N_t=n\}}]}{\mathbb{P}(N_t = n)}. \quad (2)$$

Revenons à la question, et trouvons la loi du  $n$ -uplet  $(T_1, \dots, T_n)$  sous la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{n,t}$  en utilisant la méthode de la fonction muette. On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{1}_{\{N_t=n\}}) \\ &= \mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t, T_{n+1} > t\}}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{\{t_n \leq t, t_{n+1} > t\}} e^{-t_{n+1}} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}\}} dt_1 \dots dt_n dt_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n \int_t^\infty e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} dt_{n+1} \\ &= e^{-t} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n, \end{aligned}$$

où la troisième égalité est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. Donc, en utilisant (2),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}(f(T_1, \dots, T_n)) &= \frac{\mathbb{E}(f(T_1, \dots, T_n) \mathbb{1}_{\{N_t=n\}})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} dt_1 \dots dt_n, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$  sous  $\mathbb{Q}^{n,t}$  a pour densité  $n! t^{-n} \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}}$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque :** une adaptation de l'exercice 15 (en remplaçant les variables uniformes sur  $[0, 1]$  par des variables uniformes sur  $[0, t]$ ) montre que la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$  sous  $\mathbb{Q}^{n,t}$  a la même loi que le réarrangement croissant de  $n$  variables aléatoires indépendantes et uniformes sur  $[0, t]$ .

□