X2016 – MAP 311
PC 3 – Mercredi 9 mai 2017 – Lois et espérances

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur `http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311` *un peu après la PC.*

1 Méthode de la fonction muette (pour des v.a. réelles)

Exercice 1. **(Fonction muette)** Soit N une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite. Déterminer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Exercice 2. **(Retour de la fonction muette)** Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire indépendante de X telle que telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY.

2 Vecteurs de variables aléatoires réelles à densité

Exercice 3. **(Calculer en cent leçons)** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbb{1}_{-1 \le x,y \le 1}.$$

(1) Déterminer la loi de X.

(2) Calculer $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<1/2}]$.

(3) Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

(4) Calculer $\mathbb{E}[XY]$.

(5) Calculer $\mathbb{P}(X \le Y)$. Le résultat est-il surprenant ?

(6) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

3 Propriétés générales de l'espérance

Exercice 4. **(Méthode probabiliste)** On colorie 10% d'une sphère en bleu et le reste en rouge. Le but de cet exercice est de montrer qu'il est toujours possible d'inscrire un cube dans la sphère dont tous les sommets soient rouges. Pour cela nous allons utiliser le hasard ! On choisit un cube $A_1A_2\cdots A_8$ inscrit dans la sphère uniformément au hasard (de telle que sorte que pour tout $1 \le i \le 8$, A_i suit la loi uniforme sur la sphère). Pour $1 \le i \le 8$, on note $X_i = 1$ si A_i est rouge et $X_i = 0$ si A_i est bleu.

(1) Calculer $\mathbb{E}[X_i]$ pour $1 \le i \le 8$.

(2) Conclure.

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

Exercice 5. **(Inégalité de Paley-Zygmund)** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{1}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$.

(2) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6. **(Théorème de Fubini)** Soit X une variable aléatoire réelle *positive*. Démontrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication. On pourra utiliser le fait que pour $x \geq 0$, $x = \int_0^\infty \mathbb{1}_{x \geq t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{1}_{x > t} \mathrm{d}t$.

4 Exercice à chercher pour la prochaine fois

Exercice 7. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$.

5 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 8. **(La cerise sur le gâteau)** On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

(1) Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?

(2) Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ?

Exercice 9. **(Spaghettis)** On considère un bâton sur lequel on trace au hasard deux marques. On découpe le bâton suivant les deux marques. Quelle est la probabilité pour que l'on puisse faire un triangle avec les trois morceaux ainsi obtenus ?

Exercice 10. **(Points fixes)** Quelle est le nombre moyen de points fixes d'une permutation choisie uniformément au hasard de longueur n ?

Exercice 11. **(Propagation de population)** Dans cet exercice, on étudie un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

- Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.
- À l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.

– Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

Soit T_n le premier temps où un individu occupe le site n. On fixe $a > 1/2$.

(1) Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, où les variables aléatoires $E_1, \dots, E_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n}-n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\right)^n$.

(3) Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.

6 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 12. **(Moments et médiane d'une variable aléatoire réelle)** Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

(1) Si X est à valeurs positives et $k \geq 0$, montrer que $\mathbb{E}\left[X^{k+1}\right] = (k+1) \int_0^\infty t^k (1 - F(t)) \mathrm{d}t$.

(2) Si X est intégrable, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[|X - a|] = \int_{-\infty}^{a} F(x) \mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} (1 - F(x)) \mathrm{d}x.$$

(3) On suppose que F est continue. Pour quelles(s) valeur(s) a la quantité $\mathbb{E}[|X - a]$ est-elle minimale ?

Exercice 13. **(Une inégalité)** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et intégrables. Montrer que $\mathbb{E}[|X - Y|] \leq \mathbb{E}[|X + Y|]$.

Indication. On pourra utiliser le fait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2} \mathrm{d}t = \pi|a|$.

Exercice 14. **(Même loi ou pas même loi ?)** Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

(1) On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

(2) On suppose que X et Y ont la même loi.

   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 15. **(Indépendance)** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\mathbb{E}[F(X,Y)] = \mathbb{E}[G(Y)]$ où G est la fonction définie par $G(y) = \mathbb{E}[F(X,y)]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 16. **(Permutations aléatoires)** Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose qu'elles sont à densité.

(1) Montrer que $\mathbb{P}\Big(\exists i,j\in\{1,2,\dots,n\} : i\neq j \text{ et } X_i = X_j\Big) = 0$.

(2) Montrer qu'il existe une permutation aléatoire σ telle que $\mathbb{P}\Big(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\Big) = 1$ et que la loi de σ est uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$.

Exercice 17. **(Sommes d'Erdős : exercice à 500 dollars)** Pour tout entier $n\geq 1$, on note $f(n)$ le plus grand entier $k\geq 1$ tel qu'il existe des entiers distincts $x_1,\dots,x_k\in\{1,2,\dots,n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers (chacun étant utilisé au plus une seule fois) soient toutes différentes (on considère que x_i tout seul est une somme).

Par exemple, $f(4)\geq 3$, car en choisissant $1,2,4$, les sommes qu'on peut former sont $1,2,4,1+2,1+4,2+4,1+2+4$ qui sont toutes différentes. Par ailleurs, il est clair que $f(4)\leq 4$ et que $f(4)=4$ n'est pas possible. En effet, si $f(4)=4$, on doit choisir les entiers $1,2,3,4$ et les deux sommes $1+2=3$ sont les mêmes. Ainsi, $f(4)=3$.

Erdős a conjecturé qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\text{pour tout entier } n\geq 1, \qquad f(n)\leq \ln_2(n)+C \qquad (\text{où } \ln_2(x)=\frac{\ln(2)}{\ln(x)}),$$

et a offert 500 dollars à la première preuve correcte. Cette conjecture n'a pas encore été prouvée (ou réfutée). Le but de cet exercice est de démontrer que $f(n)\leq \ln_2(n)+\frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n))+C$ en utilisant des outils probabilistes.

(1) Montrer que $f(n)\geq 1+\lfloor \ln_2(n)\rfloor$ (où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x).

On fixe maintenant $n\geq 2$ et on considère $x_1,\dots,x_k\in\{1,2,\dots,n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers soient toutes différentes. On va montrer l'existence de C (indépendant de n) tel que $k\leq \ln_2(n)+\frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n))+C$. Pour cela, on considère des variables aléatoires $B_1,\dots,B_k$ indépendantes de même loi Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $X=B_1x_1+\cdots+B_kx_k$.

(2) Soit $\lambda>1$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\mathbb{P}\Big(|X-\mathbb{E}[X]|<\lambda n\sqrt{k}/2\Big)\geq 1-\frac{1}{\lambda^2}.$$

(3) Montrer que pour tout entier x on a soit $\mathbb{P}(X=x)=0$, soit $\mathbb{P}(X=x)=2^{-k}$. En remarquant qu'il y a au plus $\lambda n\sqrt{k}+1$ entiers x tels que $|x-\mathbb{E}[X]|<\lambda n\sqrt{k}/2$, en déduire que

$$\mathbb{P}\Big(|X-\mathbb{E}[X]|<\lambda n\sqrt{k}/2\Big)\leq 2^{-k}(\lambda n\sqrt{k}+1).$$

(4) Conclure en prenant $\lambda=\sqrt{3}$.

Exercice 18. **(Théorème 123).** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. Démontrer que

$$\mathbb{P}(|X-Y|\leq 2)\leq 3\mathbb{P}(|X-Y|\leq 1).$$