X2016 – MAP 311

PC 3 – Mercredi 9 mai 2017 – Lois et espérances

Corrigé des questions peu ou non abordées en PC

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur `http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311` *un peu après la PC.*

1 Vecteurs de variables aléatoires réelles à densité

Exercice 3. **(Calculer en cent leçons)** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbb{1}_{-1 \leq x, y \leq 1}.$$

(1) Déterminer la loi de X.

(2) Calculer $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<1/2}]$.

(3) Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

(4) Calculer $\mathbb{E}[XY]$.

(5) Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$. Le résultat est-il surprenant ?

(6) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé :

(1) Comme (X, Y) est à densité, on sait que X est à densité, et sa densité est obtenue en intégrant $f_{(X,Y)}$ par rapport à la deuxième variable. Ainsi,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-1}^{1} dy \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbb{1}_{-1\leq x\leq 1} = \frac{1}{2}{-1 \leq x \leq 1}.$$

Donc X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

(2) D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<1/2}] = \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{x<1/2} f_X(x)dx = \int_{-1}^{1/2} \frac{x}{2}dx = -\frac{3}{16}.$$

(3) C'est un piège : $\frac{1}{X}$ n'est pas intégrable, car

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|}\right] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|}dx = \infty,$$

donc l'écriture $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$ n'a pas de sens.

(4) D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{[-1,1]^2} dxdy \frac{1}{4}(xy + x^2y^2) = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

(5) D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\leq Y}] = \int_{[-1,1]^2} dxdy \mathbb{1}_{x\leq y} \frac{1}{4}(1 + xy) = \int_{-1}^{1} dx \int_{x}^{1} dy \frac{1}{4}(1 + xy).$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} - \frac{x^3}{8}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

Ce n'est pas surprenant, car

$$1 = \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y),$$

et comme (X, Y) et (Y, X) ont la même par symétrie de la densité on a $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$ et comme (X, Y) est à densité on a $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

(6) Intuitivement, X et Y ne sont pas indépendantes car $f_{(X,Y)}$ ne s'exprime pas comme une fonction de x fois une fonction de y. Formellement, si X et Y étaient indépendantes, on aurait $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$, ce qui n'est pas le cas d'après la question (4).

□

2 Propriétés générales de l'espérance

Exercice 4. **(Méthode probabiliste)** On colorie 10% d'une sphère en bleu et le reste en rouge. Le but de cet exercice est de montrer qu'il est toujours possible d'inscrire un cube dans la sphère dont tous les sommets soient rouges. Pour cela nous allons utiliser le hasard ! On choisit un cube $A_1 A_2 \cdots A_8$ inscrit dans la sphère uniformément au hasard (de telle que sorte que pour tout $1 \le i \le 8$, A_i suit la loi uniforme sur la sphère). Pour $1 \le i \le 8$, on note $X_i = 1$ si A_i est rouge et $X_i = 0$ si A_i est bleu.

(1) Calculer $\mathbb{E}[X_i]$ pour $1 \le i \le 8$.

(2) Conclure.

Corrigé :

(1) Pour $1 \le i \le 8$ fixé, A_i suit la loi uniforme sur la sphère. Donc $\mathbb{E}[X_i]$ est la probabilité que A_i soit rouge, soit 0.9.

(2) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{8} X_i\right] = 8 \times 0.9 = 7.2.$$

Or $\sum_{i=1}^{8} X_i$ est une variable aléatoire entière. Il existe donc une réalisation pour laquelle $\sum_{i=1}^{8} X_i = 8$ (sinon son espérance serait inférieure ou égale à 7).

□

Exercice 5. **(Inégalité de Paley-Zygmund)** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \ge 0$.

(1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \le \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{1}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$.

(2) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \ge (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé :

(1) On distingue deux cas. Si $X > \lambda\mathbb{E}[X]$, alors $\mathbb{1}_{X>\lambda\mathbb{E}[X]} = 1$ et

$$\lambda\mathbb{E}[X] + X\mathbb{1}_{X>\lambda\mathbb{E}[X]} = \lambda\mathbb{E}[X] + X \geq X.$$

Si $X \leq \lambda\mathbb{E}[X]$, alors

$$X \leq \lambda\mathbb{E}[X] \leq \lambda\mathbb{E}[X] + X\mathbb{1}_{X>\lambda\mathbb{E}[X]}.$$

(2) On prend l'espérance de l'inégalité de la question précédente :

$$\mathbb{E}[X] \leq \lambda\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{X>\lambda\mathbb{E}[X]}\right].$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{X>\lambda\mathbb{E}[X]}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_{X>\lambda\mathbb{E}[X]}\right] \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2}\,\mathbb{E}\left[\mathbb{1}^2_{X>\lambda\mathbb{E}[X]}\right]^{1/2} = \mathbb{E}[X^2]^{1/2}\,\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}[X])^{1/2}.$$

Donc

$$(1-\lambda)^2\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}[X])$$

et le résultat voulu en découle immédiatement.

Remarque. L'inégalité de Markov permet de majorer $\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}[X])$, alors que l'inégalité de Paley-Zygmund permet de minorer cette quantité.

□

Exercice 6. **(Théorème de Fubini)** Soit X une variable aléatoire réelle *positive*. Démontrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication. On pourra utiliser le fait que pour $x \geq 0$, $x = \int_0^\infty \mathbb{1}_{x\geq t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{1}_{x>t}\mathrm{d}t$.

Corrigé : Pour la première égalité, on utilise la première égalité de l'indication, avec le théorème de Fubini pour les fonctions positives (on rappelle qu'une espérance n'est rien d'autre qu'une intégrale) :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{X\geq t}\mathrm{d}t\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq t}]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t).$$

La deuxième égalité se montre de la même manière. □

3 Exercice à chercher pour la prochaine fois

Exercice 7. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$.

Corrigé : On utilise la méthode de la fonction muette. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue bornée. On calcule $\mathbb{E}[f(\sin(V))]$. Comme $f(\sin(U))$ est bornée, elle admet une espérance, et on peut donc utiliser le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[f(\sin(U))] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\sin(x))dx.$$

On a envie de faire le changement de variable $u = \sin(x)$, mais attention : sin n'est pas injective sur $[0, \pi]$. On se restreint donc à $[0, \pi/2]$, et en faisant le changement de variable $u = \sin(x)$ (et donc $x = \arcsin(u)$, $dx = du/\sqrt{1-u^2}$) :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{1} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

On en déduit que $\sin(U)$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée au point u par

$$\frac{2}{\pi\sqrt{1-u^2}}\mathbb{1}_{0<u<1}.$$

□

4 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 8. **(La cerise sur le gâteau)** On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

(1) Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?

(2) Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ?

Corrigé : (Corrigé d'après le livre *Introduction aux Probabilités et aux Statistiques* de Jean-François Delmas.) On note Θ_1 et Θ_2 les angles formés par les deux rayons et le rayon qui passe par la cerise. L'énoncé du problème indique que Θ_1 et Θ_2 sont indépendants et suivent la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. La longueur angulaire de la part contenant la cerise est égale à $2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2|$.

(1) La probabilité pour que la part contenant la cerise soit la plus petite est égale à $\mathbb{P}(2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| < |\Theta_1 - \Theta_2|)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| < |\Theta_1 - \Theta_2|) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| < |\Theta_1 - \Theta_2|}\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \mathbb{1}_{|\theta_1 - \theta_2| > \pi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} 2\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \mathbb{1}_{\theta_1 - \theta_2 > \pi} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

où pour l'avant dernière égalité on a utilisé la symétrie entre θ_1 et θ_2 pour se restreindre au cas où $\theta_2 < \theta_1$. La probabilité pour que la part contenant la cerise soit la plus petite est donc $1/4$.

(2) La longueur moyenne de la part contenant la cerise est égale à $2\pi - \mathbb{E}[|\Theta_1 - \Theta_2|]$, qu'on calcule avec le théorème de transfert et la même astuce de symétrie :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\Theta_1 - \Theta_2|] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 |\theta_1 - \theta_2| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} 2\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} (\theta_1 - \theta_2) d\theta_2 \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

La longueur moyenne de la part contenant la cerise est donc $4\pi/3$.

La part qui contient la cerise est plus grande en moyenne et elle est également plus grande dans 75% des cas. Pour voir que ces résultats ne contredisent pas l'intuition il faut inverser les opérations. On découpe d'abord au hasard deux rayons dans le gâteau, puis on jette au hasard la cerise sur le bord. Celle-ci a intuitivement plus de chance de tomber sur la part la plus grosse ! Il reste à se convaincre que jeter la cerise sur le bord puis couper le gâteau au hasard, ou couper le gâteau au hasard puis jeter la cerise sur le bord donne bien le même résultat □

Exercice 9. **(Spaghettis)** On considère un bâton sur lequel on trace au hasard deux marques. On découpe le bâton suivant les deux marques. Quelle est la probabilité pour que l'on puisse faire un triangle avec les trois morceaux ainsi obtenus ?

Corrigé : (Corrigé d'après le livre *Introduction aux Probabilités et aux Statistiques* de Jean-François Delmas.) On suppose que la longueur du bâton est d'une unité. On note X et Y les emplacements des deux marques. Par hypothèse X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On fait un triangle si et seulement si aucune des longueurs des morceaux n'est plus grande que la somme des deux autres, ou ce qui revient au même, si et seulement si la longueur de chaque morceau est plus petite que $1/2$. Cela est équivalent aux trois conditions suivantes :

$$1-\max(X,Y)\leq 1/2, \qquad \min(X,Y)\leq 1/2 \quad \text{et} \quad \max(X,Y)-\min(X,Y)\leq 1/2.$$

La probabilité cherchée P vaut donc

$$\begin{aligned}
P &= \mathbb{P}(1-\max(X,Y)\leq 1/2, \min(X,Y)\leq 1/2, \max(X,Y)-\min(X,Y)\leq 1/2) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{1-\max(X,Y)\leq 1/2, \min(X,Y)\leq 1/2, \max(X,Y)-\min(X,Y)\leq 1/2}\right] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 dx dy \mathbb{1}_{\max(x,y)\geq 1/2, \min(x,y)\leq 1/2, \max(x,y)-\min(x,y)\leq 1/2} \\
&= 2\int_{1/2}^1 dx \int_{x-1/2}^{1/2} dy \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

où à la dernière égalité on s'est restreint au cas où $x\geq 1/2$ par symétrie (en multipliant par un facteur 2). La probabilité cherchée vaut donc $1/4$. □

Exercice 10. **(Points fixes)** Quelle est le nombre moyen de points fixes d'une permutation choisie uniformément au hasard de longueur n ?

Corrigé :

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$ (on rappelle qu'une permutation de $\mathcal{S}_n$ est une bijection de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{1,2,\ldots,n\}$ et que si $\sigma\in\mathcal{S}_n$, on dit que $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ est un point fixe de σ si $\sigma(i)=i$). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}_n$ et de loi uniforme. On note $N(X)$ le nombre de points fixes de X, et on remarque que

$$N(X)=\mathbb{1}_{1 \text{ est un point fixe de } X}+\mathbb{1}_{2 \text{ est un point fixe de } X}+\cdots+\mathbb{1}_{n \text{ est un point fixe de } X}.$$

Or, pour $1\leq i\leq n$, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{i \text{ est un point fixe de } X}\right]=\mathbb{P}(i \text{ est un point fixe de } X)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[N(X)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

□

Exercice 11. **(Propagation de population)** Dans cet exercice, on étudie un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

- Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.
- À l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.
- Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

Soit T_n le premier temps où un individu occupe le site n. On fixe $a > 1/2$.

(1) Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, où les variables aléatoires $E_1, \dots, E_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}} \right)^n$.

(3) Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.

Corrigé :

(1) Pour passer d'un site n à un site $n+1$, il faut attendre un temps exponentiel de paramètre 1, indépendant de toute le reste.

(2) Tout d'abord, si $u < 1$, d'après le théorème de transfert e^{uE_1} admet une espérance car $\int_0^\infty e^{ux} e^{-u} du < \infty$ et

$$\mathbb{E}\left[e^{xE_1}\right] = \int_0^\infty e^{ux} e^{-u} du = \frac{1}{1-x}.$$

De plus, par indépendence de $E_1, \dots, E_n$,

$$\mathbb{E}\left[e^{uT_n}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{uE_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{uE_i}\right] = (1-u)^{-n}.$$

On écrit ensuite

$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) = \mathbb{P}\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} + n^{a-1/2}\right) = \mathbb{P}\left(e^{\frac{T_n}{\sqrt{n}}} \geq e^{\sqrt{n} + n^{a-1/2}}\right),$$

et d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \mathbb{E}\left[e^{\frac{T_n}{\sqrt{n}}}\right] = e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}}\right)^n$$

d'après le calcul précédent (avec $u = 1/\sqrt{n}$).

(3) On a

$$e^{-\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}}\right)^n = e^{-n^{1/2} - n \ln(1 - n^{-1/2})} = e^{-n^{1/2} + n^{1/2} - 1/2 + o(1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Donc il existe une constante c telle que $\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq ce^{-n^{a-1/2}}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $a > 1/2$, on a $\sum_{n \geq 1} e^{-n^{a-1/2}} < \infty$. Donc

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) < \infty,$$

et le résultat demandé provient du (premier) lemme de Borel–Cantelli.

□

5 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 12. **(Moments et médiane d'une variable aléatoire réelle)** Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

(1) Si X est à valeurs positives et $k \geq 0$, montrer que $\mathbb{E}\left[X^{k+1}\right] = (k+1)\int_0^\infty t^k(1-F(t))\mathrm{d}t$.

(2) Si X est intégrable, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[|X-a|] = \int_{-\infty}^a F(x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x.$$

(3) On suppose que F est continue. Pour quelles(s) valeur(s) a la quantité $\mathbb{E}[|X-a]$ est-elle minimale ?

Corrigé : On s'inspire de l'exercice 6.

(1) On a, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_0^\infty t^k(1-F(t))\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^k \mathbb{P}(X>t)\mathrm{d}t = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty t^k \mathbb{1}_{X>t}\mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^X t^k \mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X^{k+1}}{k+1}\right],$$

d'où le résultat.

(2) On écrit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^a F(x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^a \mathbb{P}(X\leq x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty \mathbb{P}(X>x)\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^a \mathbb{1}_{X\leq x}\mathrm{d}x + \int_a^\infty \mathbb{1}_{X>x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\leq a}(a-X) + \mathbb{1}_{X>a}(X-a)] \\ &= \mathbb{E}[|X-a|].\end{aligned}$$

(3) D'après la formule précédente, $\phi : a \mapsto \mathbb{E}[|X-a|]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et tend vers l'infini en $\pm\infty$. Donc ϕ admet un infimum et l'atteint en un point a tel que $\phi'(a) = 0$, c'est-à-dire $1-2F(a) = 0$. L'ensemble des points a tels que $\mathbb{E}[|X-a]$ atteint son minimum est donc l'ensemble des points a tels que $F(a) = 1/2$. Comme F est croissante, il s'agit soit d'un point, soit d'un intervalle.

□

Exercice 13. **(Une inégalité)** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et intégrables. Montrer que $\mathbb{E}[|X-Y|] \leq \mathbb{E}[|X+Y|]$.

Indication. On pourra utiliser le fait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos(at)}{t^2}\mathrm{d}t = \pi|a|$.

Corrigé : D'après l'indication et le théorème de Fubini pour les fonctions positives ($1-\cos(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$), on a

$$\pi\mathbb{E}[|Z|] = \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos(Zt)}{t^2}dt\right] = \int_{-\infty}^\infty \frac{1-\mathbb{E}[\cos(Zt)]}{t^2}dt.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\pi\mathbb{E}[|X+Y|-|X-Y|] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[\cos((X-Y)t)-\cos((X+Y)t)]}{t^2}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[2\sin(Xt)\sin(Yt)]}{t^2}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\mathbb{E}[\sin(Xt)]\mathbb{E}[\sin(Yt)]}{t^2}\,dt \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\mathbb{E}[\sin(Xt)]^2}{t^2}\,dt \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi)} \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

□

Exercice 14. **(Même loi ou pas même loi ?)** Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

(1) On suppose que $\mathbb{P}(X=Y)=1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

(2) On suppose que X et Y ont la même loi.

(a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

(b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Corrigé :

1. Si $\mathbb{P}(X=Y)=1$, alors pour toute fonction continue bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on a l'égalité $\mathbb{P}(h(X)-h(Y)=0)=1$ et donc $\mathbb{E}[h(X)-h(Y)]=0$, de sorte que $\mathbb{E}[h(X)]=\mathbb{E}[h(Y)]$, ce qui montre que X et Y ont la même loi.

   La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire de densité $\sqrt{2\pi}^{-1}e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Posons $Y=-X$. Alors Y est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Alors

$$
\mathbb{E}[g(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x)e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-x^2/2}\,dx.
$$

   Donc X et Y ont la même loi mais ne sont pas égales avec probabilité 1.

2. (a) Pour toute fonction continue bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la fonction $h\circ f$ est mesurable bornée. Comme X et Y ont la même loi, on a

$$
\mathbb{E}[h\circ f(X)] = \int_R h(f(x))\mathbb{P}_X(dx) = \int_R h(f(x))\mathbb{P}_Y(dx) = \mathbb{E}[h\circ f(Y)],
$$

   ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z=X$. Alors $XZ=X^2$ et $YZ=-X^2$. La loi de X^2 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac en 0 δ_0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc XZ et YZ n'ont pas la même loi.

□

Exercice 15. **(Indépendance)** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\mathbb{E}[F(X,Y)]=\mathbb{E}[G(Y)]$ où G est la fonction définie par $G(y)=\mathbb{E}[F(X,y)]$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.

Corrigé : Tout d'abord, d'après la formule de transfert :

$$\mathbb{E}[F(X,y)] = \int_{\mathbb{R}} dx F(x,y) f_X(x).$$

Ensuite, comme X et Y sont indépendantes, (X,Y) est à densité et a $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour densité. Donc, d'après la formule de transfert et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(X,Y)] &= \int_R \int_R fxdy F(x,y) f_X(x) f_Y(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dy f_Y(y) \left(\int_R dx F(x,y) f_X(x) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dy f_Y(y) G(y) \\
&= \mathbb{E}[G(Y)]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du théorème de transfert.

Ainsi, lorsqu'on calcule des espérances faisant intervenir des variables aléatoires indépendantes, on peut faire l'espérance « par rapport à l'une des variables » en faisant comme si les autres étaient des quantités non aléatoires, puis en faisant l'espérance par rapport à une autre variable, et ainsi de suite. □

Exercice 16. **(Permutations aléatoires)** Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose qu'elles sont à densité.

(1) Montrer que $\mathbb{P}\left(\exists i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \text{ et } X_i = X_j\right) = 0$.

(2) Montrer qu'il existe une permutation aléatoire σ telle que $\mathbb{P}\left(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\right) = 1$ et que la loi de σ est uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$.

Corrigé :

(1) On a

$$\mathbb{P}\left(\exists i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \text{ et } X_i = X_j\right) \leq \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq j} \mathbb{P}\left(X_i = X_j\right).$$

Or, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_i = X_j\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_i = X_j}\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \mathbb{1}_{x_i = x_j} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x)^2 \mathbb{1}_{x=y} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx f(x)^2 \int_x^x dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(2) Soit A l'événement $\{\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : \text{ on a } X_i \neq X_j \text{ si } i \neq j\}$, de sorte que $\mathbb{P}(A) = 1$ par la première question. Sur l'événement A (c'est-à-dire si $\omega \in A$), les nombres $X_1, \dots, X_n$ peuvent être rangés dans un ordre strictement croissant. On peut donc définir σ de sorte que $X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}$ lorsque $\omega \in A$. Si $\omega \neq A$, on définit σ comme étant égal à l'identité, de sorte que σ est bien définie sur Ω tout entier. Comme $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\right) = \mathbb{P}\left(\{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\} \cap A\right) = \mathbb{P}(A) = 1$$

car par construction les événements $\{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\} \cap A$ et A sont égaux.

Remarque. σ dépend de ω, mais comme d'habitude en théorie des probabilités on n'écrit pas explicitement cette dépendance. Par ailleurs, le point un peu délicat est qu'il faut définir sur σ sur Ω tout entier, car une variable est par définition une application définie sur Ω tout entier. C'est pour cela qu'il a fallu définir σ d'une part sur A, et d'autre par sur le complémentaire de A.

Soit maintenant τ une permutation fixée de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Alors

$$\mathbb{P}\left(X_{\tau(1)} < \cdots < X_{\tau(n)}\right) = \mathbb{P}(X_1 < \cdots < X_n).$$

Ceci provient simplement du théorème de transfert et du fait que le produit $f(x_1) \cdots f(x_n)$ ne change pas si on permute $x_1, \ldots, x_n$. Ainsi, la probabilité

$$\mathbb{P}(\sigma = \tau) = \mathbb{P}\left(X_{\tau(1)} < \cdots < X_{\tau(n)}\right)$$

ne dépend pas de la permutation τ. La permutation aléatoire σ suit donc la loi uniforme sur les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

□

Exercice 17. **(Sommes d'Erdős : exercice à 500 dollars)** Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f(n)$ le plus grand entier $k \geq 1$ tel qu'il existe des entiers distincts $x_1, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers (chacun étant utilisé au plus une seule fois) soient toutes différentes (on considère que x_i tout seul est une somme).

Par exemple, $f(4) \geq 3$, car en choisissant $1, 2, 4$, les sommes qu'on peut former sont $1, 2, 4, 1+2, 1+4, 2+4, 1+2+4$ qui sont toutes différentes. Par ailleurs, il est clair que $f(4) \leq 4$ et que $f(4) = 4$ n'est pas possible. En effet, si $f(4) = 4$, on doit choisir les entiers $1, 2, 3, 4$ et les deux sommes $1 + 2 = 3$ sont les mêmes. Ainsi, $f(4) = 3$.

Erdős a conjecturé qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, \qquad f(n) \leq \ln_2(n) + C \qquad \left(\text{où } \ln_2(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right),$$

et a offert 500 dollars à la première preuve correcte. Cette conjecture n'a pas encore été prouvée (ou réfutée). Le but de cet exercice est de démontrer que $f(n) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n)) + C$ en utilisant des outils probabilistes.

(1) Montrer que $f(n) \geq 1 + \lfloor \ln_2(n) \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).

On fixe maintenant $n \geq 2$ et on considère $x_1, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers soient toutes différentes. On va montrer l'existence de C (indépendant de n) tel que $k \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n)) + C$. Pour cela, on considère des variables aléatoires $B_1, \ldots, B_k$ indépendantes de même loi Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $X = B_1 x_1 + \cdots + B_k x_k$.

(2) Soit $\lambda > 1$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/2\right) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

(3) Montrer que pour tout entier x on a soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$, soit $\mathbb{P}(X = x) = 2^{-k}$. En remarquant qu'il y a au plus $\lambda n\sqrt{k} + 1$ entiers x tels que $|x - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/2$, en déduire que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/2\right) \leq 2^{-k}(\lambda n\sqrt{k} + 1).$$

(4) Conclure en prenant $\lambda = \sqrt{3}$.

Corrigé :

(1) En prenant l'ensemble $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}\}$, pour lequel les sommes sont toutes différentes, on voit que $f(n) \geq 1 + \lfloor \ln_2(n) \rfloor$.

(2) Tout d'abord, comme la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes dans $\mathbb{L}^2$ est la somme des variances, on a

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \mathrm{Var}(B_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leq \frac{kn^2}{4}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda n \sqrt{k}/2\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2 n^2 k/4} \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) Si $x \in \mathbb{Z}$ ne peut pas s'écrire comme une somme à partir des $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Z}$ peut s'écrire comme une somme des $(x_i)_{i \leq i \leq k}$, alors par hypothèse ce n'est possible que d'une manière $x = \sum_{i=1}^{k} j_i x_i$ avec $j_i \in \{0, 1\}$, et dans ce cas $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(B_i = j_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k) = \frac{1}{2^k}$ par indépendance de $B_1, \dots, B_k$. Ensuite, un intervalle ouvert de longueur u contient au plus $u + 1$ entiers. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2\right) = \sum_{x \in \mathbb{Z}: |x - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2} \mathbb{P}(X = x) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}: |X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2} \frac{1}{2^k}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2\right) \leq= 2^{-k}(\lambda n \sqrt{k} + 1)$$

(4) Ainsi,

$$1 - \frac{1}{\lambda^2} \leq 2^{-k}(\lambda n \sqrt{k} + 1),$$

et en prenant $\lambda = \sqrt{3}$ et en utilisant le fait que $\lambda n \sqrt{k} + 1 \leq 2 \lambda n \sqrt{k}$, on obtient $\frac{1}{3} \leq 2^{-k} \sqrt{3} n \sqrt{k}$ et donc

$$k + \ln_2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2} \ln_2(k)$$

et donc (en réinjectant et en utilisant le fait que $k \leq n$)

$$k + \ln_2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2} \ln_2\left(\ln_2(n) + \frac{1}{2}\ln_2(k) - \ln_2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2} \ln_2\left(\frac{3}{2} \ln_2(n)\right).$$

Donc

$$k \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2} \ln_2(\ln_2(n)) + \ln_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

□

Exercice 18. **(Théorème 123).** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. Démontrer que

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq 2) \leq 3\mathbb{P}(|X - Y| \leq 1).$$

Corrigé : Ce n'est pas du tout facile ! Voir http://www.math.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/123.pdf □