X2016 – MAP 311 – PC 2

RAPPELS : Variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Pour des compléments théoriques facultatifs concerant les applications mesurables et l'intégrale par rapport à des mesures, voir le polycopié *Intégration de probabilités* de Jean-François Le Gall, disponible sur internet : http://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf

1 Variables aléatoires

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces probabilisés. Une **variable aléatoire** de Ω dans E est une application $X : \Omega \to E$ qui est mesurable (c'est-à-dire telle que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{E}$).

Attention. La définition de variable aléatoire ne fait pas intervenir de probabilité $\mathbb{P}$.

Lorsqu'on parle de « variable aléatoire à valeurs dans E », on parle d'une variable aléatoire avec la tribu sur E sous-entendue (lorsque $E = \mathbb{R}$ on prend généralement la tribu borélienne) et l'espace probabilisable de départ sous-entendu également.

Dans MAP 311, on ne se préoccupera pas des problèmes de mesurabilité (c'est-à-dire qu'on ne se préoccupera pas de savoir si les fonctions considérées sont bien mesurables).

2 Notations « probabilistes »

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire. Si $B \in \mathcal{E}$:

- $\{X \in B\}$ est une *notation* pour l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, qu'on utilise pour simplifier l'écriture (il est aussi parfois noté $(X \in B)$, mais on préfère souvent noter $\{X \in B\}$ pour insister que $\{X \in B\}$ est un ensemble).
- $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ par définition de l'image réciproque (et $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire).
- $\mathbb{P}(X \in B)$ est une *notation* pour $\mathbb{P}(\{X \in B\})$, qu'on utilise pour simplifier l'écriture.

Dans le même genre d'idées, si $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{F})$ est une autre variable aléatoire et si $C \in \mathcal{F}$:

- $\mathbb{P}(X \in B, Y \in C)$ et $\mathbb{P}(X \in B \text{ et } Y \in C)$ signifient tous les deux $\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{Y \in C\})$, ou encore $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B \text{ et } Y(\omega) \in C\})$.
- $\mathbb{P}(X \in B \text{ ou } Y \in C)$ signifie $\mathbb{P}(\{X \in B\} \cup \{Y \in C\})$, ou encore $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B \text{ ou } Y(\omega) \in C\})$.

Attention. Dans les deux points précédents, X et Y ne doivent pas forcément arriver dans le même espace, mais doivent absolument être définis sur le même espace.

Par exemple, $\mathbb{P}(X \geq 2)$ est une notation pour $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 2\})$ et $\mathbb{P}(X = Y)$ est une notation pour $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

3 Lois de variables aléatoires

Si $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire et si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, la **loi de X sous $\mathbb{P}$** est une

probabilité *sur l'espace d'arrivée* $(E, \mathcal{E})$,

souvent notée $\mathbb{P}_X$, définie par

$$\text{pour tout } B \in \mathcal{E}, \qquad \mathbb{P}_X(B) \quad := \quad \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \quad = \quad \mathbb{P}\left(X \in B\right).$$

Attention. La loi de X dépend de la probabilité considérée sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Cependant, s'il n'y a qu'une probabilité mise en jeu sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et qu'il n'y a pas d'ambiguité possible, on parle simplement de la loi de X.

4 Variables aléatoires indépendantes

Si $X_1 : (\Omega, \mathcal{A} \to (E_1, \mathcal{E}_1), \ldots, X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E_n, \mathcal{E}_n)$ sont des variables aléatoires, on dit qu'elles sont (mutuellement) indépendantes (par rapport à $\mathbb{P}$) si

$$\text{pour tous } B_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}_n, \qquad \mathbb{P}\left(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \in B_i\right).$$

Si I est un ensemble quelconque, on dit que des variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si pour tout $J \subset I$, avec $\mathrm{Card}(J) < \infty$, les variables aléatoires $(X_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.

(Informellement, l'indépendance transforme les intersections en produits).

Attention. Des variables aléatoires peuvent-être indépendantes par rapport à une mesure de probabilité, mais plus indépendantes par rapport à une autre mesure de probabilité.

5 Variable aléatoire réelle à densité

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle est à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (mesurable, intégrable au sens de Lebesgue) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Attention. Une densité n'est pas unique (elle est définie à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle près).

Propriétés. Si X est une variable aléatoire à densité de densité f, alors :

- la fonction de répartition $x \mapsto F_X(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$ est continue (et donc si F_X n'est pas continue, alors X n'est pas à densité) ;
- pour tout $x < y \in [-\infty, \infty]$, on a

$$\mathbb{P}\left(x \leq X \leq y\right) = \mathbb{P}\left(x < X \leq y\right) = \mathbb{P}\left(x \leq X < y\right) = \mathbb{P}\left(x < X < y\right) = \int_{x}^{y} f(s)ds,$$

  ce qui permet de calculer des probabilités en calculant des intégrales.

Comment montrer qu'une variable aléatoire réelle est à densité ? On peut calculer F_X, montrer que F_X est continue, puis qu'elle dérivable sauf en un nombre fini de points, et dans ce cas une densité de X est donnée par la dérivée de F_X aux points où elle est dérivable (dans le cas où F_X n'est pas C_1 par morceaux, c'est un théorème de théorie de la mesure pas si facile que cela à démontrer !).

En fait, comme F_X est croissante, d'après un théorème de Lebesgue, F_X est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$, avec une dérivée f_X positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, et on peut montrer (en utilisant le lemme de Fatou) que $\int_{\mathbb{R}} f_X \leq 1$. On peut en déduire que X est à densité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$.

(Voir le corrigé de l'exercice 13 de la PC 2 pour un exemple où $f_X = 0$ presque partout !)

On verra en PC 3 une méthode plus générale qui ne passe pas les fonctions de répartition : le principe de la fonction muette.

6 Espérance de variables aléatoires réelles

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Cas positif. Si X est positive, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ a TOUJOURS un sens.

Cas de signe quelconque. On ne peut écrire $\mathbb{E}[X]$ que si X est **intégrable**, c'est-à-dire si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Attention. Pour l'instant, on n'a défini l'espérance que pour des variables aléatoires à valeurs réelles.

7 Théorème de transfert

Comment calculer les espérances de type $\mathbb{E}[F(X)]$? On utilise le théorème de transfert, qui s'énonce comme suit.

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (mesurable).

- *Cas positif.* Si F est positive (mais X peut être de signe quelconque), on a toujours

$$\mathbb{E}[F(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathbb{P}_X(dx) \qquad \in \quad \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

où l'intégrale est une intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$. La variable aléatoire X est intégrable si et seulement si cette intégrale est finie.

Cas particulier : si $F \geq 0$ et si X est une variable aléatoire à densité de densité f, alors

$$\mathbb{E}[F(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x)dx.$$

- *Cas de signe quelconque.* Lorsque F est de signe quelconque, le théorème de transfert est composé de deux parties :
  (1) $F(X)$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\mathbb{P}_X(dx) < \infty$.
  (2) Lorsque $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\mathbb{P}_X(dx) < \infty$, on a

$$\mathbb{E}\left[F(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathbb{P}_X(dx).$$

Cas particulier : si X est une variable aléatoire à densité de densité f, alors

$$F(X) \text{ est intégrable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|f(x)dx < \infty$$

$$\text{et dans ce cas,} \qquad \mathbb{E}\left[F(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x)dx.$$

Intérêt du théorème de transfert. Par définition de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left[F(X)\right] = \int_{\Omega} F(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega).$$

Ainsi, le théorème de transfert permet de transformer un calcul d'intégrale sur l'ensemble Ω, a priori inconnu, en un calcul d'intégrale sur l'ensemble d'arrivée de X, connu (ici $\mathbb{R}$).

Généralisation du théorème de transfert. Une généralisation importante de la formule de transfert, utile pour la suite, concerne des variables aléatoires X **quelconques**, pas forcément réelles.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace probabilisable $(E, \mathcal{E})$ quelconque. Dans la suite de MAP 311, on prendra surtout $E = \mathbb{R}^n$ (mais pour E on peut penser à un espace de fonctions, un ensemble de matrices, un ensemble de graphes, etc.).

Soit $F : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ une fonction (mesurable). Dans ce cas, le théorème de transfert s'énonce comme suit.

Cas positif. Si F est positive, on a toujours

$$\mathbb{E}\left[F(X)\right] = \int_E F(u)\mathbb{P}_X(du) \qquad \in \quad \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

où l'intégrale est une intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ (sur E).

Cas de signe quelconque. Lorsque F est de signe quelconque, le théorème de transfert est composé de deux parties :

(1) $F(X)$ admet une espérance si et seulement si $\int_E |F(u)|\mathbb{P}_X(du) < \infty$.

(2) Lorsque $\int_E |F(u)|\mathbb{P}_X(du) < \infty$, on a

$$\mathbb{E}\left[F(X)\right] = \int_E F(u)\mathbb{P}_X(du).$$

Encore une fois, dans la suite de MAP 311 on prendra surtout $E = \mathbb{R}^n$, de sorte que toutes ces intégrales seront des intégrales multiples sur $\mathbb{R}^n$.