X2016 – MAP 311

PC 2 – Lundi 24 avril 2017 – Variables aléatoires réelles

Corrigé des questions non abordées en PC

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311 *un peu après la PC.*

2 Variables aléatoires réelles indépendantes

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Corrigé :
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{Y = k\} : k \geq 1)$:

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > Y, Y = k).$$

Or on a l'égalité des événements $\{X > Y, Y = k\} = \{X > k, Y = k\}$. Donc, en utilisant l'indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > k, Y = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda k} p(1-p)^{k-1}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X > Y) = pe^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} \left(e^{-\lambda}(1-p)\right)^{k-1} = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)} = \frac{p}{e^{\lambda} + p - 1}$$

□

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Identifier la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.

Corrigé :
Soit $Z = \min(X, Y)$. Calculons $\mathbb{P}(Z > u)$ pour $u \in \mathbb{R}$. Si $u < 0$, on a $\mathbb{P}(Z \geq u) = 1$. Si $u \geq 0$, on a, par indépendance de X et de Y :

$$\mathbb{P}(Z > u) = \mathbb{P}(X > u, Y > u) = \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(Y > u) = e^{-\lambda u} e^{-\mu u} = e^{-(\lambda+\mu)u}.$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z \leq u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda+\mu)u} & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$, et comme la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle, on en déduit que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$. □

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

3 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 10. Le cycle d'un feu de circulation est le suivant : le feu est vert sur l'intervalle $[0, v]$ et rouge sur $]v, v+r]$ avec $v, r > 0$. L'instant d'arrivée U de Zoé est supposé uniformément réparti sur le cycle $[0, r+v]$.

(1) Exprimer en fonction de U le temps d'attente T de Zoé au feu dans le cas où aucun vehicule ne se trouve devant le feu à l'instant où elle arrive.

(2) Déterminer la fonction de répartition de T. Est-ce une variable aléatoire discrète ou à densité ?

Corrigé :

(1) On a $T = (v + r - U)\mathbb{1}_{v \leq U \leq v+r}$

(2) On a $\mathbb{P}(T < 0) = 0$, $\mathbb{P}(T \leq x) = \mathbb{P}(T = 0) + \mathbb{P}(0 < T \leq x) = \frac{v+x}{v+r}$ pour $0 < x \leq r$. La variable aléatoire T n'est donc ni à densité (car sa fonction de répartition n'est pas continue) ni discrète (car elle est continue strictement croissante sur sur $[0, r]$.

□

Exercice 11. (**Particule dans un puit de potentiel, loi d'Arrhénius et loi de Pareto**) On considère une particule dans un puit de potentiel de barrière d'énergie E positive. La loi d'Arrhénius donne le temps de sortie $\tau(E)$ en fonction de E de la particule hors du puit dû aux fluctuations thermiques :

$$\tau(E) = \tau_0 \, e^{\frac{E}{k_B T}}.$$

Ici, la constante τ_0 est un temps de référence caractéristique, T est la température absolue, et k_B est la constante de Boltzmann. On suppose que la barrière est décrite par une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/E_0$, où E_0 est une énergie de référence. Le temps de sortie de la particule est alors une variable aléatoire notée Y :

$$Y := \tau(X),$$

où $\tau(x) = \tau_0 \, e^{\frac{x}{k_B T}}$.

(1) Déterminer la loi Y.

(2) Montrer que pour tout $t' > 0$ on a $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(Y > t + t' | Y > t) = 1$. Interpréter ce résultat.

Remarque. la loi de Y est la loi de Pareto. C'est une loi de puissance qui a des applications non seulement en physique mais aussi en sciences sociales, en gestion de qualité, etc.

Corrigé :

(1) Déterminons la fonction de répartition de Y. On a $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$ pour $x < \tau_0$, et pour $x \geq \tau_0$:

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\tau_0 e^{\frac{X}{k_B T}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq k_B T \ln\left(\frac{x}{\tau_0}\right)\right) = 1 - e^{-\lambda k_B T \ln\left(\frac{x}{\tau_0}\right)} = 1 - \left(\frac{\tau_0}{x}\right)^{\frac{k_B T}{E_0}}.$$

Ainsi Y est une variable aléatoire à densité, et une densité f_Y est

$$f_Y(x) = \alpha \frac{\tau_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x \geq \tau_0},$$

où $\alpha = \frac{k_B T}{E_0}$.

On remarque que si la température tend vers 0, α tend vers 0 également. Il en est de même si E_0 tend vers l'infini.

(2) D'après le calcul de la fonction de répartition de$Y$, pour tous $t, t' \geq \tau_0$ on a

$$\mathbb{P}(Y > t + t' | Y > t) = \left(1 + \frac{t'}{t}\right)^{-\alpha} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Si la particule est restée dans le puit de potentiel trop longtemps, la probabilité qu'elle y demeure est proche de 1.

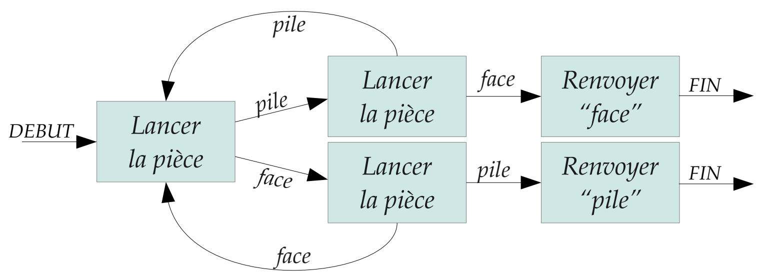
Remarque. Pour $\alpha > 1$, le temps moyen de sortie du puit vaut

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\alpha \tau_0}{\alpha - 1}.$$

Par contre, $0 < \alpha \leq 1$, on a $\mathbb{E}[Y] = \infty$! Donc, si la température est assez basse, la particule met un temps moyen infini pour sortir du puit. On pourrait s'attendre à ce que cela soit le cas quand $T = 0$ seulement.

□

Exercice 12. (**Détruquer une pièce**) On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité p et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant :



On note $T \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{\text{« pile »}, \text{« face »}\}$ le résultat de l'algorithme.

(1) Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?

(2) Démontrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(T = 2k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1}\, 2p(1-p),$$
en déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement : $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

(3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R = \text{« pile »}) = 1/2$.

(4) Démontrer que $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p(1-p)}$.

Corrigé :

(1) L'algorithme revient au début dès qu'on lit deux résultats identiques à la suite. Dans cet exemple, on trouve donc $T = 10$ et $R = $ « face ».

(2) Notons $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (on modélise un résultat « pile » au i-ième lancer par $X_i = 1$). Calculons d'abord $A = \mathbb{P}(X_1 = X_2)$ et $B = \mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$. On a
$$A = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = p^2 + (1-p)^2, \qquad B = 1 - A = 2p(1-p).$$
On a alors
$$\mathbb{P}(T = 2k) = \mathbb{P}\Big(X_1 = X_2, X_3 = X_4, \ldots, X_{2k-3} = X_{2k-2}, X_{2k-1} \neq X_{2k}\Big).$$
Par indépendance, on en déduit
$$\mathbb{P}(T = 2k) = A^{k-1} B = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1}\, 2p(1-p).$$
Comme $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(T = 2k) = 1$, on a bien $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

(3) D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(R = \text{« pile »}) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T = 2k, X_{2k} = 1) = \sum_{k\geq 1} A^{k-1}\mathbb{P}(X_{2k-1} = 0)\mathbb{P}(X_{2k} = 1) = \frac{p(1-p)}{1-A}.$$

Donc $\mathbb{P}(R = \text{« pile »}) = 1/2$. Comme $\mathbb{P}(R = \text{« pile »}) + \mathbb{P}(R = \text{« face »}) = 1$, le résultat s'ensuit.

(4) Soit Y la variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y = k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1} 2p(1-p)$ pour $k \geq 1$. Il s'agit d'une loi géométrique de paramètre $2p(1-p)$, donc $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2p(1-p)}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k\geq 1} 2k\mathbb{P}(T = 2k) = 2\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p(1-p)}.$$

$\square$

Exercice 13. **(Générer une loi uniforme avec des variables de Bernoulli)** Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. On pose $Z = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$.

(1) On note

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{2^k} : n \geq 1, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\} \right\}$$

l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]$, qui sont denses dans $[0,1]$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ dont la fonction de répartition F_Y vérifie $F_Y(t) = t$ pour tout $t \in \mathcal{D}$. Montrer que Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(2) Montrer que pour tous $i_1, \ldots, i_p \in \{0,1\}$ on a

$$\mathbb{P}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_p = i_p\right) = \mathbb{P}\left(Z \in \left[\sum_{i=1}^{p} i_j 2^{-j}, \sum_{j=1}^{p} i_j 2^{-j} + 2^{-p}\right]\right).$$

En déduit que que Z est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(3) Réciproquement, montrer que si Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, alors les bits de son écriture en base 2 forment une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

(4) Que se passe-t-il en base $b \geq 3$ avec la loi uniforme sur $\{0, \ldots, b-1\}$?

Corrigé :

(1) Soit $x \in [0,1[$ et montrons que $F_Y(x) = x$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans $[0,1]$, il existe une suite décroissante $(d_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ tels que $d_n \to x$. Comme F_Y est continue à droite en x, on a $d_n = F_Y(d_n) \to F_Y(x)$. Donc $F_Y(x) = x$. On montre de même que $F_Y(1-) = 1$ (où $F_Y(1-)$ est la la limite à gauche de F_Y en 1). Comme $1 \geq F_Y(1) \geq F_Y(1-) = 1$, on en déduit que $F_Y(1) = 1$.

(2) La première partie de la question découle du fait qu'avec probabilité 1 une infinité de 0 apparaissent dans la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ et que

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{t_k}{2^k} < \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

pour toute suite $(t_k)_{k\geq n+1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ qui prend au moins une fois la valeur 0.

Notons

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{2^k} : t_1, \ldots, t_{n-1} \in \{0,1\} \text{ et } t_n = 1 \right\}.$$

Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $t \in \mathcal{D}_n$ on a $\mathbb{P}(Z \leq t) = t$. Pour $n = 1$, on a bien $\mathbb{P}(Z \leq 1/2) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. Supposons que le résultat est acquis pour les éléments de $\mathcal{D}_k$, $1 \leq k \leq n$ et montrons le pour les éléments de $\mathcal{D}_{n+1}$. Tout d'abord, $\mathbb{P}(Z \leq 1/2^{n+1}) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{n+1} = 0) = 1/2^{n+1}$. Ensuite, choisissons $t = \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} \in \mathcal{D}_{n+1}$ avec $1 \leq m < n$ et $t_m = 1$. Alors, d'après la première partie de la question,

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(Z \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k}\right) + \mathbb{P}(X_1 = t_1, X_2 = t_2, \ldots, X_m = t_m, X_{m+1} = 0, \ldots, X_n = 0)$$

Donc, par hypothèse de récurrence,

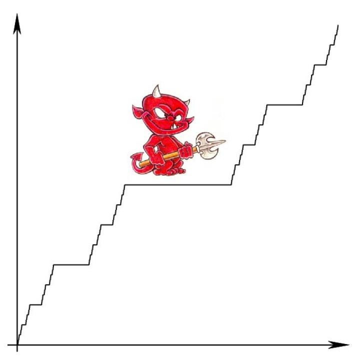
$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(Z \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} = t.$$

Ceci clôt la récurrence et conclut grâce à la question (1).

(3) Ceci se démontre en utilisant la même idée que la question (2), voir l'exemple 4.9.9 du poly pour plus de détails.

(4) Les mêmes résultats sont satisfaits avec $Z = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} X_k$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Remarque. Il peut se produire un phénomène surprenant lorsque $b \geq 3$ et les X_n ne sont pas de loi uniforme sur $\{0, \ldots, b-1\}$. Un exemple célèbre est fourni par l'escalier du diable, qui correspond à la fonction de répartition F_Y quand $b = 3$ et les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 0$. Dans ce cas, F_Y est une fonction continue, dérivable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) de dérivée nulle, qui est connue sous le nom d'escalier du diable (voir la Figure ci-dessous et http://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor). Dans ce cas, Y n'est pas à densité (sa loi est même singulière par rapport à la mesure de Lebesgue).



□

4 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 14. (**Support d'une loi**) Soit X une variable aléatoire réelle.

(1) On suppose que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{P}(X \in A) \in \{0, 1\}$. Montrer que X est presque-sûrement constante (c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$).

(2) On suppose que l'ensemble $\{\mathbb{P}(X \in A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est dénombrable. Montrer que p.s. X ne peut prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs (c'est-à-dire, il existe un ensemble dénombrable Γ tel que $\mathbb{P}(X \in \Gamma) = 1$).

Corrigé :

(1) Soit $c = \sup\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) = 1\}$. Comme $\mathbb{P}(X \leq x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ et $\mathbb{P}(X \leq x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, on

a $c \in \mathbb{R}$. Vérifions que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. Par définition de c, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X \in [c - 1/n, c + 1/n]) = 1$. Donc

$$1 = \mathbb{P}\left(X \in \bigcap_{n\geq 1}[c - 1/n; c + 1/n]\right) = \mathbb{P}(X = c).$$

(2) Soit F_X la fonction de répartition de X. Comme F_X est croissante, elle a au plus un nombre dénomrable de points de discontinuités. Notons $(x_i)_{i\in I}$ les points de discontinuité de F_X et $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour $i \in I$, et considérons la variable aléatoire Y à valeurs dans $\{x_i : i \in I\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = x_i) = p_i$ pour $i \in I$. Vérifions que X et Y ont la même loi.

Pour cela, notons F_Y la fonction de répartition de Y. D'après l'hypothèse, et comme Y ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs possibles, l'ensemble $\{F_X(x) - F_Y(x) : x \in \mathbb{R}\}$ est dénombrable. Or $F_X - F_Y$ est continue. Si $F_X - F_Y$ n'est pas constante, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $F_X - F_Y$ prendrait un nombre non dénombrable de valeurs possibles,ce qui est absurde. Donc $F_X - F_Y$ est constante. Comme $\lim_{-\infty}(F_X - F_Y) = 0$, on en déduit que $F_X = F_Y$.

Ainsi, X et Y ont même loi, et donc $\mathbb{P}(X \in \Gamma) = 1$, avec $\Gamma = \{x_i : i \in I\}$.

□

Exercice 15. **(Une question de mesurabilité)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\geq 1}$ un système complet d'événements (on rappelle que cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).

On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire ($\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on le munit naturellement de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$).

Corrigé :

Soit $B \subset \mathbb{N}^*$. Alors, par définition,

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{i\in B} A_i \in \mathcal{A},$$

comme union finie ou dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$. □

Exercice 16. **(Exemple d'ensemble non mesurable)** Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ (muni de la tribu borélienne sur $[0, 2\pi]$). On voit $[0, 2\pi]$ comme le cercle unité $\mathbb{S}$ en identifiant les deux points 0 et 2π. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha/(2\pi)$ soit irrationel, et notons R_α la rotation d'angle α sur le cercle, définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. On note $R_\alpha^{(n)}$ la composée n-ième de R_α pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $z \in \mathbb{S}$, l'orbite de z est par définition l'ensemble $\{R_\alpha^{(n)}(z) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}$. Comme $\alpha/(2\pi)$ est irrationnel, on peut montrer que toutes les orbites sont infinies (et même denses).

Notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des orbites, et en utilisant l'axiome du choix choisissons pour tout $i \in I$ un représentant $z_i \in O_i$. Posons finalement

$$E = \{z_i : i \in I\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$ et que cette union est disjointe.

(2) En supposant que E est mesurable, aboutir à une contradiction.

Corrigé :

(1) Si $z \in \mathbb{S}$, il existe $i \in I$ tel que $z \in \mathcal{O}_i$. Ainsi z est dans l'orbite de z_i, et il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z \in R_\alpha^{(k)}(z_i)$. Donc $z \in R_\alpha^{(k)}(E)$, et donc $\mathbb{S} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$. Comme l'inclusion inverse est claire, on a égalité des deux ensembles.

Pour montrer que l'union est disjointe, raisonnons par l'absurde en supposant que $x \in R_\alpha^{(m)}(E)$ et $x \in R_\alpha^{(n)}(E)$ avec $m \neq n$. Il existe alors $i, j \in I$ tels que $x = R_\alpha^{(m)}(z_i) = R_\alpha^{(n)}(z_j)$. Donc z_i et z_j sont dans la même orbite, et donc $i = j$. Mais alors $z_i = R_\alpha^{(m-n)}(z_i)$, ce qui contredit le fait que les orbites sont infinies.

(2) Si E était mesurable, on aurait

$$1 = \mathbb{P}(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(R_\alpha^{(n)}(E)\right).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{P}(R_\alpha^{(n)}(E)) = \mathbb{P}(E)$ car la loi uniforme sur le cercle est invariante par rotations. Ceci nous amène à une contradiction.

$\square$